

AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

L. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

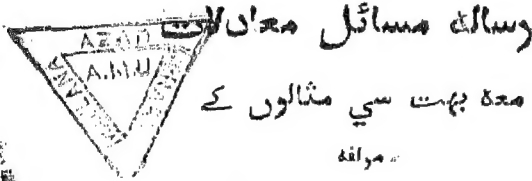
TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE
SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA
BEHAR



ڈاک ہنٹر صاحب ایم ای ایف آر ایس

چسکو

منشی محمد ذکاء اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسائٹی علیگڑہ و سین ٹیفک سوسائٹی صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دہلی مطبع مرتضیٰ مین باہتمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

ڈپل پریس مطبعہ انسٹیٹیوٹ علیگڑہ

M.A.I. LIBRARY, A.M.U.



U1859

بسم اللہ الرحمن الرحیم دیس جا

اس سال میں جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب صولیمین ہوا کرتے ہیں لکھی ہیں اور انکی ساتھ بہت سی تالیفیں یعنی وٹھی کی سوالات امتحان ہی منتخب کر کے تحریر کی ہیں مسائل معادلات میں اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتائج ہوتی ہیں کہ اگر طالب علم ابتداء تحصیل علوم ریاضیہ میں ان کو تحصیل کرنے تو بہت فایدہ اور کو چل ہوتی ہیں اس سالہ کو وہی طالب علم پڑھ سکتی ہیں جو الجبرا اسی خوبا ہر میں آئیں کہیں بڑی علم کی ضرورت سواء دفعات ۱۷۹۱۷۵ و ۲۰۸ و ۳۱۷ کے نہیں پڑتی ان دفعات کو طالب علم جب تک نہ مطالعہ کریں کہ وہ علم مثلث میں ضابطہ ڈی مولور سے واقف ہوں یہ کتاب حقیقت میں ایک ضخیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسٹی اس کتاب میں جو الہ جا بجا جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے

اس سالہ میں ایسی تحقیقات بہت سی لکھی گئی ہیں جنکا نام ہی کسی اور سالہ مسائل معادلات میں نہیں پایا جاتا مثلاً اوغین ہی ایک کاچی کا ثبوت ہے کہ ہر مساوات کی ایک قیمت ہوتی ہے پورنر کی ترکیب اور مسائل ہقاظ اور ضابطہ کاچی صبا کا خیالی قیمتوں کی تعداد کی بیان میں اور ضابطہ مقطعات کا عرض یہ مضامین اور بعض اور اسکی اسی کتاب میں اول اول لکھی گئی ہیں جناب ٹوڈنٹر صبا کی تصنیفات میں یہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہ ہے

صفحہ	مضمون	باب
۱	دوہجہ	پہلا باب
۱۶	وجود قیمت کے بیان میں	دوسرا باب
۲۲	خواص معادلات	تیسرا باب
۳۲	تبدیل قیمت مساوات	چوتھا باب
۴۰	دس گریس کا قاعدہ علامات	پانچواں باب
۴۷	مساوی قیمتیں	چھٹا باب
۵۶	مساوی قیمتوں کی حدود غائی اور قیمتوں کا جدا جدا کرنا	ساتھواں باب
۷۲	قیمتیں محدود اور نا طاقہ	اٹھواں باب
۷۹	متبادل معادلات	نواں باب
۸۴	معادلات متکافہ	دسواں باب
۸۹	معادلات شراکتی	گیارہواں باب
۹۸	معادلات کمبجی	بارہواں باب
۱۰۹	معادلات درجہ چہارم	تیرہواں باب
۱۱۷	سٹریم حساب کا ضابطہ	چودھواں باب
۱۲۷	فوریر کا ضابطہ	پندرہواں باب
۱۳۳	لاگر انٹر کی ترکیب تقرب	سولہواں باب
۱۴۰	نیوٹن حساب کی ترکیب تقرب اور فوریر کا ضمیمہ	سترہواں باب
۱۴۸	ہورنر کی ترکیب	اٹھارہواں باب
۱۶۲	قیمتوں کے بالقرینہ حملے	اونیسواں باب
۱۷۱	استعمال بالقرینہ جملوں کا	بیسواں باب
۱۷۷	قیمتوں کی قوتوں کے مجموعی	ایکسواں باب
۱۸۶	دور کرنا سقا دیر بھول کا یعنی اسقاط	ایکسواں باب
۱۹۹	سلسلہ میں جملہ کا پہلانا	تیسواں باب
۲۰۷	مسائل متفرقہ	چوبیسواں باب
۲۲۷	ادخال مقطعات	پچیسواں باب
۲۳۸	خواص مقطعات	چھیسواں باب
۲۴۷	استعمال مقطعات	ستیسواں باب
۲۶۷	مثالیں	
۲۸۷	جواب	

مسائل

دیباچہ

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسویں مسائل مساوات میں طالب علم نے بڑا ہموگا مساوات $ا + ب + ج = ۰$ کی قیمتیں لیں

$$- ب = ا + ج - ۲۰$$

۱۲

ہیں اور ان قیمتوں کی کیفیت یہی کہ اوکا مجموعہ برابر ہی $- ۲۰$ کی اور حاصل ضرب برابر ۲۰ کی یعنی مجموعہ ان قیمتوں کا برابر ہی مساوات $ا + ب + ج = ۰$ کی دوسری قسم کی سرکی جسکی علامت بدلی ہوئی ہے اور اوکا حاصل ضرب برابر ہی مساوات کی آخری قسم کے پس طالب علم اس مضمون کو خوب غور خیال کر کے سمجھ لیں کہ اس سالہ کی تمام مضامین اسی قسم کی ہیں جب مقابلہ میں تفساوت درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی ہیں مساوات درجہ دوم سی اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کے خواص مسائل بیان ہونگی گویا یہاں پر جو ہم نے لکھا ہے وہ ایک نمونہ ہی اس پر قیاس کر کے طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن میں کر سکتا ہے۔ یہ نتیجہ اور مسائل جو بیان ہونگے وہ اور فروغ ریاضیہ میں کام آئینگے اور ان مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سودمند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہیں اوکا اس قبیل کی مشق چندان مشکل اور دشوار بھی نہیں یہ ایک مضمون بوقلمون اوکی توجہ اور مطالعہ کی عادت بڑھانی کی واسطی ایک عجیب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کے معنی طالب علم جبر مقابلہ میں خوب سمجھ گئی ہونگی مگر ہم اوکی



تعریف پر لکھتی ہیں جسی مطلب خوب صفا اور عیاں ہو جا جس جبر جملہ میں لامندج ہو اوکا جملہ لاکھتی ہیں اور ج (۱۱) سی تعبیر کرنی ہیں اور جملہ لاکھتی جگہ ج (۱۱) میں کر کے جانی اور وہ ج (۱۱) کو فنا اور نابود کر دی اوکا قیمت مساوات

ج (لا) = کی کہتے ہیں (اس ساری کتاب میں مساوات اور معادکہ کی ایک ہی معنی میں ترجمہ)

$$لا + ب - لا - ا + س - لا - ۲ + ۰ + ک + لا + ل$$

کی صورت کا جو جملہ ہو اور اس میں نہ مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ۱ و ب و س ۰ ک دل
میں لا داخل نہ رکھتا ہو تو اس کو نہ درجہ کا صحیح جملہ مطلق لا کا کہتے ہیں اگر ہم کو یہ درجہ فہم کرنا ہو
کہ وہ کونسی لا کی قیمت ہے کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہے تو اس کی ہمیشہ معنی ہونگی کہ ہم درجہ کی صحیح مطلق
کی قیمت دریافت کرتی ہیں اس پر کہ میں ساری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات میں اگر ہم
چاہیں تو لا کی قوت اعلیٰ کی مثال پر مساوات کو تقسیم کر کے سراسر اعلیٰ قوت کا ایک بنا لیں تو
مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی

$$لا + ع - لا - ا + ع - لا - ۲ + ۰ + ع - لا + ع - ۰ =$$

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتی ہیں اور اس سادگی کی کیفیت اگلی کہل جائیگی جب لا
کا سر ایک ہوتا ہے تو خواص مساواتوں کی بہت ٹھیک ٹھیک اور درست بیان ہوتی ہیں اور جب یہ نہیں ہوتا تو
مساواتوں کی خواص بیان کرتی ہیں کچھ دقت پڑتی ہے اگر ہم کو یہ منظور نہ ہو کہ لا کے مثال کو
واحد بنائیں تو اس کو ع سے تعبیر کریں تو مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی

$$ع - لا + ع - لا - ا + ع - لا - ۲ + ۰ + ع - لا + ع - ۰ =$$

(۳) یہ ہمیشہ یاد رکھنی کی بات ہے کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہ ہوتی ہے کہ صحیح مطلق مساوات
اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تحولات جبریہ سی اس صورت کی طرف تحویل ہو سکتی ہے
مثلاً مساوات لا + ب - لا + س - لا = ف تو یہ مساوات مساوات منطق کی طرف
اس طرح تحویل ہو سکتی ہے کہ س - لا اور ف کو منتقل کر کے مجذور کر لیں تو مساوات منطق صحیح درجہ
چہارم کی بن جائیگی جن مساواتوں میں لو کا رضی جملی یا قوت نامی جملی یا علم شلتی جملی یا اضم جملی
مندرج ہوں وہ ہماری تحقیقات کی اذکار البصیرہ داخل نہیں ہوں گے مثلاً اس قسم کی مساواتیں
کہ لا - ی = ۰ اور لا کو لا - ۱ = ۰ داخل نہیں ہو مگر ہماری تحقیقات میں صحت ایسی مساواتوں

۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳
۳	۹+	۲۱	۴۳+	۷۴+	۱۰۶+	۱۴۲+
۳	۴+	۲۱+	۵۸+	۱۸۱+		

پس چھل ۱۸۱ ہوا

(۴) اگر لا = ایک کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا - اور تقسیم ہوگا
فرض کرو کہ ج (لا) اس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہ معلوم ہی کہ ج (لا) = تو ہم کو یہ ثابت کرنا ہوگی کہ ج (لا)

لا - اور پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا - اور موافق قاعدہ مربع جبریہ کی تقسیم کی جاؤ جب تک کہ باقی میں لا نہ رہی
اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی ہی تو وہ رہی تو
ج (لا) = ق (لا - ۱) + ر اس متطابقہ میں لا کی جگہ لڑ کہو تو اس سبب سے کہ

ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ایک رہی ہی لا نہایت نہیں ہو سکتا اس واسطی جب لا = ایک ہو
تو ق (لا - ۱) فنا ہو جائیگا اور بموجب فرض کی لا = ایک ہونی سی ج (لا) ہی فنا ہوتا
اس واسطی جب لا = ایک ہو تو رہی فنا ہوتا ہی اور چونکہ زمین لا نہیں ہی تو جب وہ لا = ایک

ہونی سی فنا ہوتا ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = اور لا - اور تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہے
(۵) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکھا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکھتا ہی اور سچہ کو بڑا بنا ہی مگر اس کے
ثبوت کو ایک اور طرح لکھتی ہیں اور میں خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ اسی اور زیادہ فائدہ
ہوتا ہی فرض کرو کہ

$$ج (لا) = ع. لا + ع. لا^۲ + ع. لا^۳ + \dots + ع. لا^n - ع. ن - لا + ع. ن$$

چونکہ ج (۱) = تو ج (لا) = ج (۱) - ج (۱) (۱)

$$= ع. (لا - ۱) + ع. (لا^۲ - ۱) + ع. (لا^۳ - ۱) + \dots + ع. (لا^n - ۱) - ع. ن - لا + ع. ن$$

اب جبر مقابلہ کی دفعہ ۲۸۳ کی موافق لا - اور لا^۲ - اور لا^۳ - ... میں ہر ایک لا - اور
پوری تقسیم ہوتی ہی اب اس تقسیم کرنے سے ہم کو خارج قسمت یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{aligned} & \text{ع. (لا-۱) + (لا-۲) + (لا-۳) + \dots + (لا-۱۱) + (لا-۱۲)} \\ & \text{ع. (لا-۲) + (لا-۳) + (لا-۴) + \dots + (لا-۱۲) + (لا-۱۳)} \end{aligned}$$

$$\text{ع. (لا-۱۱) + (لا-۱۲)}$$

$$\text{ع. (لا-۱۲)}$$

اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سے لکھتی ہیں کہ

$$\begin{aligned} & \text{ع. (لا-۱) + (ع. (لا-۱) + ع. (لا-۲) + ع. (لا-۳) + \dots + ع. (لا-۱۱) + ع. (لا-۱۲)} \\ & \text{ع. (لا-۱۲) + ع. (لا-۱۳) + \dots + ع. (لا-۱۱) + ع. (لا-۱۲) + ع. (لا-۱۳)} \end{aligned}$$

اور اسکو ہم

$$\text{ق. (لا-۱) + ق. (لا-۲) + ق. (لا-۳) + \dots + ق. (لا-۱۱) + ق. (لا-۱۲)}$$

سے تعبیر کرتی ہیں

اسو سطح پہنچاں جدید مثال قدیم سے ان صور جبریدین اسطرح مربوط ہوتے ہیں

$$\text{ق. = ع. اور ق. = ا. ق. + ع. اور ق. = ا. ق. + ع. + ع.}$$

$$\text{اور ق. = ا. ق. + ع. + ع.}$$

یعنی ہر ایک مثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ ہر ایک مثال جدید کو اسکی باقیل کے مثال جدیدین ضرب دو اور حاصل ہر متناظر مثال قدیم زیادہ کرو اور یہی خیال کرتا چاہے کہ ہر ایک مثال جدید دفعہ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ج (۱۱) ایک جملہ صحیح ناطقہ لاکا ہو اور اسکو لا۔ (تقسیم کرنا ہو تو لا قیمت

مساوات ج (۱۱) = کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (۱۱) کو جب لا۔ (تقسیم کریں تو خارج قسمت ق نکلتا ہے تو ج (۱۱) = ق (لا-۱)

اگر اس متطابقہ میں لا کی جگہ ا کہیں تو ق کی لا انتہا نہ ہونی کی سبب ق (لا-۱)

اول سطر اس جملہ کی توجہ (لا) ہی اور کی مثال کو ہم حج (لا) سے اور
امثال $\frac{1}{x^2}$ کوچ (لا) سی اور امثال $\frac{1}{x^3}$ کوچ (لا) سی اور علیٰ ہذا القیاس تعبیر کرو
بہم طریقہ کتابت حالی از وقت او موقوف نہ ہو گا کہ بہت سی زمین لگانی پڑیں گے
پس عموماً ہم $\frac{1}{x^n}$ کی امثال کوچ (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اسی معلوم ہوا کہ
$$ح(لا + ی) = ح لا + وح(لا) + \frac{1}{x} ح(لا) + \frac{1}{x^2} ح(لا) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{x^{n-1}} ح(لا) + \frac{1}{x^n} ح(لا)$$

دیکھیں یہی معلوم ہوتا ہے کہ حج (لا) وحج (لا) وحج (لا) وحج (لا) وحج (لا) اس قاعدہ عامہ کی موافق تمام مربوط ہوتی ہیں کہ حج⁺ (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ایک رقم حج (لا) کو لا کے قوت نمایں جواس فم میں ہو ضرب دیتی ہیں اور اوس قوت نامیں سی ایک گنٹا کر قوت نہایتے ہیں

(۱۱) "فرض کرو کہ ج (لا) چوتھی درجہ کا ہے اور

$$r_e + u_e + v_e + w_e + x_e = (1) z$$

$$\text{نوع (۱)} = \epsilon^N + \epsilon^N_1 + \epsilon^N_2 + \epsilon^N_3 + \epsilon^N_4$$

$$r \cdot r + u \cdot r \times v + v \cdot r \times v = (u) \cdot \hat{r}$$

$$, \mathcal{E} \times \mathcal{F} + U \cdot \mathcal{E} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} = (U) \mathcal{E}$$

$$2 \times 2 \times 2 = (2)^3$$

$$(1) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{2} = (5+1) \frac{1}{2}$$

اب ہم بعض سیدھی سادھی مفادات لکھینگے جیسی یہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتوں میں ایک قیمت کا وجود ہوتا ہی ایک شخص کی ضرورت پڑتی ہی جسکو بدیہی جانکر تسلیم کر لیا کرتی ہیں مگر ہم اسکو دفعہ ذیل میں ثابت کرتے ہیں

(۱۶) فرض کرو کہ ج (۱۱) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ جملہ لا کا ہو اور اسکی قیمتیں ج (۱) اور ج (ب) موافق لا کی اور ب کی قیمتوں کی ہوں یعنی ج (۱۱) میں جب لا کی جگہ (۱) لکھیں تو ج (۱۱) کی قیمت ج (۱) حاصل ہو اور علیٰ ہذا القیاس ج (ب) تو واجب اسی بدل کر ب بنی گا تو ج (۱۱) ج (۱) سی بدل کر ج (ب) بنی گا اور ج (۱) اور ج (ب) کی سبب سیانی قیمتوں پر اسکی نوبت پہنچے گی اب فرض کرو کہ لا کی قیمت میں لگائی جائی اور اسکی موافق ج (۱۱) کی قیمت ج (س) ہو اب لا کی جگہ ایک اور قیمت س + ص مقرر کرو تو ص کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + ص) اور ج (س) کے تفاوت کو جتنا چاہیں کم کر سکتی ہیں اسو اسطے کہ

$$ج (س + ص) = ج (س) + ص ج (س) + \frac{ص^2}{2} ج (س) + \dots + \frac{ص^{n-1}}{(n-1)!} ج (س) + \frac{ص^n}{n!} ج (س)$$

اب پہر یہ جو یہ دفعہ ۱۷ کی ص کو کافی چھوٹا فرض کر کے اول رقم تسلسلہ ص ج (س) اور ص^۲ ج (س) اور ص^۳ ج (س) کو جو بعد دم نہیں ہوتی ایسا بنا سکتی ہیں کہ وہ اپنی کل مالیت کی قریب مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہیں ہو جا اور ص کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی یہ رقم خود جتنی چھوٹی ہم چاہیں بن سکتی ہی اسو اسطے ج (س + ص) - ج (س) کو جتنا چاہیں ص کو چھوٹا فرض کر کی بنا سکتی ہیں اسی ثابت ہوتا ہی کہ لاجس طرح بتایا ہی اسطرح ج (۱۱) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (۱۱) کی کوئی قیمت موافق قیمت شخصہ لا کی ہو تو اسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہیں موافق لا کی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت شخصہ کے کافی قریب ہونی سکتی ہیں اسی معلوم ہو اگر جب لا سی بتا کہ بدلتا ہی تو جملہ ج (۱۱) قیمت ج (۱) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بہ نوبت بدلتا ہی اور اسکی اندر کہیں سنگی نہیں واقع ہوتی اسو اسطے کہ اگر یہ کہا جا کہ اسکی اندر سنگی واقع ہوتی ہے تو اسکی یہ معنی ہیں کہ ہم لا کی ایسی قیمت نہیں مقرر کر سکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ میں ہم یہ تو نہیں بیان کیا کہ ج (۱۱) ہمیشہ ج (۱) سی ج (ب) تک ہوتا ہے یا ہمیشہ ج (۱) سی ج (ب) تک ہوتا ہے اسلی مختلف صورتیں ہونگی کہیں زیادہ ہوگا کہیں کم ہوگا لیکن ہم ہم فی بیان کیا ہے کہ وہ نوبت بہ نوبت بتدریج قیمت ج (۱) سی قیمت ج (ب) تک تبدیل ہوتا ہے اور یہ تبدیل ایک ایک نہیں ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہوتا ہے یہ ایک بڑا مفہوم ہے اور اگر طالب علم اس پر غور کر لے گا تو اسکو یہ بات سی معلوم ہوگا کیونکہ یہ بات ظاہر ہے کہ لاکھ ہوتا ہے قیمت کی موافق ج (۱۱) کی یہی مٹتا ہے قیمت ہوگی اور یہ ہم فی ثابت کر دیا کہ اگر لاکھ بے نہایت چھوٹی تبدیلی کی بجائی توج (۱۱) میں بھی بی نہایت چھوٹی تبدیلی ہوگی اس لیے ج (۱۱) کے متواتر قیمتوں میں جو درجہ بدرجہ ہوتی ہیں کہیں گستگی اور گستگی نہیں واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ الجبر سی واقف ہوگا تو اسکو یہ مفہوم اور ہر کا ٹیڈا کیسے معلوم ہوگا وہ خطوط منحنی جو جملوں کو تعبیر کریں بنا لے گا اور اول پر غور اس طرح کر لے گا کہ ج (۱۱) کو کسی تعبیر کر لے گا پس ج (۱۱) کو مساوات خط منحنی کی خیال کر لے گا اور ہر اس خط منحنی کے اوس حصہ کو جو $0 = y$ اور $x = 0$ کی واقع ہے فرض کر لے گا پھر سی اوس کی ذہن میں یہی عمدہ تصور پیدا ہوگا کہ ج (۱۱) کی وسطی قیمتیں مابین ج (۱) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کی جائیں اور میں ضرور یہی کہ متواتر ہوا اور کہیں اور میں گستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بھی لحاظ رہی کہ x اور y اور ج (۱) اور ج (ب) کی ساتھ مثبت ہونی کی قید نہیں ہے ج (۱) اور ج (ب) کی مابینی قیمتوں کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لگی گئی میں بعض ہر مقدار کی ج (۱) اور ج (ب) کی مقدار مابینی کہیں گے اگر سی ج (۱) اور ج (ب) سی کے ایک ہے علامت ہو

(۱۹) اگر لاکھ جملہ صحیحہ ناطقہ ج (۱۱) میں لاکھ جگہ دو عدد رکھی جائیں اور اونی قیمتیں ج (۱۱) کی مختلف علامت حاصل ہوں تو ضرور یہی کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (۱۱) = 0 لاکھ اور اونی قیمتوں کی درمیان واقع ہو

فرض کر کہ x اور y وہ قیمتیں ہیں توج (۱) اور ج (ب) مختلف علامت ہوں فرض کیے ہیں

اور بموجب دفعہ ۴ کی جب لا تبدیع اسی باتک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی سنگی قیمت کی
ج (۱) سی ج (ب) تک بدلتا ہی لیکن اس سبب سے کہ ج (۱) اور ج (ب) مختلف علامت ہیں
تو قیمت صفحہ کی اونکی درمیان واقع ہوگی اسلی ضروری کہ موافق کسی قیمت کی جو ا اور ب کے درمیان
واقع ہو ج (لا) برابر صفحہ کی ہو اور اسکی ہی معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = -

کی ایک قیمت درمیان ا اور ب کے واقع ہوتی ہے
(۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت کہتی ہے
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = - سے تعبیر ہو بیان

$$\text{ج (لا) = ع. لا + ع. لا - ۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ع. ن - لا + ع. ن}$$

اس میں ن ایک طاق عدد ہی
جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۴ کی اول رقم ج (لا) کی یعنی ع. لا باقی ارقام کی مجموعہ سے بڑا ہوگا
اس طرح (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع. لا کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے
اگر ثابت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ع. کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہوگا تو
ج (لا) کی علامت مخالف ع. کی علامت کی ہوگی پس اس سبب سے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت
جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضروری کہ ایک قیمت
درمیان لا کی ایسی ہو کہ ج (لا) کو معدوم کر دی اسکی ہیہ معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = - کی ایک اصلی قیمت ہے
اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ قیمت مثبت ہوگی یا منفی اس واسطے کہ جب لا کی واسطی صفحہ کہیں
تو ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع. کی علامت ہی پس اگر ع. اور ع. ن کی ایک ہی علامت ہو
تو ع. ن مثبت ہی تو مساوات ج (لا) = - کی یقینی ایک منفی قیمت ہوگی اور اگر ع. اور ع. ن
کی مختلف علامتیں ہوں تو ع. ن ایک مقدار منفی ہوگی اس واسطے یقینی ایک مثبت قیمت مساوات
ج (لا) = - کی ہوگی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب سے لا کی اعلیٰ قوت کی مثال یہ
مساوات کو تقسیم کر کے سادی صورت اسکی بنائیں تو ایک اصلی قیمت مساوات ہوگی جسکی

ویساج

12

دبیاجہ علامت مقفاد اخر رقم کے علامت کے ہوں گی
(۲۱) ایک ساوان زوج درجہ کی ہوا اور صورت سادہ رکھتی ہوا اور اسکی اخر رقم منفی ہو تو اسکی
دو اصلی قیمتیں مختلف العلامت ضرور ہوں گیں

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات ہو تو جب لا صفر ہوگا تو بموجب فرض کے

ج (لا) منفی ہوگا جب لاکافی بڑا ہو تو ج (لا) مثبت ہوگا خواہ لا مثبت ہو یا منفی پس
کوئی منفی قیمت لاکافی ایسی ہی کج (لا) کو معدوم کرتی ہی اور نیز کوئی مثبت قیمت بھی ایسی ہے کہ
ج (لا) کو معدوم کرتی ہی یعنی مساوات ج (لا) = کی یعنی ایک مثبت قیمت اور ایک منفی قیمت ہی
(۲۲) اگر جملہ صحیح ناطقہ ج (لا) میں ارقام کی ایک صنف کی مثال کی یکساں علامت ہو اور انکی الگی کے
ارقام کی صنف کی مثال کی علامت پہلی علامت کی متضاد ہو تو مساوات ج (لا) = کی ایک مثبت
قیمت ہوگی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

قیمت ہوگی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی
 بموجب دفعات ۲۰ اور ۲۱ کی مساوات ج (۱۱) = کی ایک مثبت قیمت ہوگی اب یہ ثابت کرینگے
 کہ صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

فرض کرو کہ ج (۱۱) = $\frac{1}{2}E + \frac{1}{4}E + \frac{1}{8}E + \dots + \frac{1}{2^n}E + \frac{1}{2^{n+1}}E$

فرض کرو کہ امثال ع اور ع ۱۰۰ کے نسبت ہیں اور باقی امثال منفی ہیں

فرض کرو کہ $x_{r+1} = x_r + 1$ اور $x_{r+2} = x_r + 2$ $\therefore x_{r+1} - x_r = 1$ اور $x_{r+2} - x_r = 2$

پس ج (۷) کو ہم اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$\frac{0e}{-0e} - \dots - \frac{r+e}{u} - \frac{1+e}{u} - e + \dots + \frac{r+e}{u} + \frac{1+e}{u} - e = (u)e$$

جملہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$ ایسا ہی بڑھتا ہے جیسا کہ لائبرٹا ہے

مگر جس حالت میں کرے۔ کہے تو اس کی قیمت مستقل ہو جاتی ہے اور جملہ

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$
 اب گنتا ہے جیسا کہ لا بڑھتا ہے

پس جب لاہور سے اوپر پڑتا ہی تو دو دنوں بعد سوا، ایک دفعہ کہ آپس میں برابر نہیں ہو سکتی کسی بھی چیز کے

ج (۱۱) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح متساہ نہ لگی اسلی ہی ہم آخر میں دفات کے نتائج کو نہایت صفائی اور درستگی ساتھ لکھیں

دفعہ ۲۰ میں جس سوات کا ذکر ہی اسکی پہلی قیمت ثابت ہوا ہی کہ اسکی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہے

مگر یہ نہیں ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ میں جس سوات کا بیان ہوا ہی اسکی پہلی

قیمت ثابت ہوا ہی کہ اسکی کم از کم دو اصلی قیمتیں ہونگی مگر یہ نہیں ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتیں ہونگی

دفعہ ۲۲ میں جس سوات کا ذکر ہی اس میں ثابت ہوا ہی کہ ایک مثبت قیمت اسکی ہوتی ہی اور یہ بھی ثابت

ہوا ہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر یہ نہیں ثابت ہوا کہ کوئی اسکی منفی قیمت نہیں ہوتی

(۲۴) دفات ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ میں جو مثبت ثابت ہوئی ہیں ان میں خاص صورتوں کے اندر

قیمتوں کا وجود موقوف اس امر پر کہا گیا ہی کہ ہم اس بات کو ثابت کریں کہ

ج (۱۱) کی ایک دفعہ علامت یا کوئی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ

خاص ملک قیمتوں کی ایسی ہو کہ ہم یہ ثابت کریں کہ ج (۱۱) کی علامت موافق اس مسلک کے

نہیں تبدیل ہوتی تو کوئی قیمت مساوات ج (۱۱) = ۰ میں اس مسلک سے لاکھ واسطی نہ ہوگی

اب اس دعوی کی ظاہر صورتیں ذیل میں لکھتی ہیں

(۱) اگر مثال ج (۱۱) کی سب مثبت ہوں تو مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہ ہوگی

(۲) اگر ج (۱۱) میں لاکھ زوج قواء کی مثال کیساں علامت رکھیں اور لاکھ طاق قوتوں کی

سب مثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکھیں تو مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی

(۳) اگر لاکھ صرف زوج قواء ج (۱۱) ملتف ہو اور تمام مثال کی کیساں علامت ہو تو مساوات

ج (۱۱) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی

(۴) اگر صرف لاکھ طاق قواء ج (۱۱) ملتف ہو اور تمام مثال کی کیساں علامت ہو تو

مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی الا اس صورت میں کہ لا = ۰

ہم خود دو آخر صورتوں میں یہ لکھا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہیں ہوگی مگر یہ ہم نے پہلی کہا کہ

کوئی قیمت اسکی نہیں ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابلہ کی جیسویں باب میں پڑا ہی ہیں کہ
باتفاق جہو سادات بعض صورتوں میں ایسی ہوتی ہی کہ اسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

باب دوم وجود قیمت کی بیان میں

(۲۵) ہم ثابت کرینگے کہ ہر یک سادات چھ ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی

یعنی اس صورت ۱ + ب - ۱ - ا کی اسمیں ۱ اور ب اصلی ہیں ایسی جملہ ۱ + ب - ۱ - ا
کو حسین ۱ اور ب اصلی ہوں جملہ خیالی کہتی ہیں اسکی یہ معنی ہیں کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کے ساتھ استعمال کریں
لائیں تو اسی مراد یہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ۱ + ب - ۱ - ا کی صورت کا ہی اور اسمیں ۱ اور ب اصلی ہیں
(۲۶) طالب علم اس بات کو جانے میں کہ بعض باتیں باتفاق جہو ایسی مقرر ہوتی ہیں کہ حکم سب سے
ہم تحقیقات جبر میں خیالی جملوں سے بحث کر سکتی ہیں اور انکی باب میں بعض مسائل قائم کر سکتی ہیں
مثلاً ۱ + ب کی جذر کی مثبت قیمت غالب ہر یک جملہ ۱ + ب - ۱ - ا اور ۱ - ب - ۱ - ا کا کہتا ہے
اور اس حدود کی شغانت سی یہ ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ دو خیالی جملوں کی حاصل ضرب کا قالب
ان دو جملوں کی قالبوں کا حاصل ضرب ہوتا ہی
اسواسطی کہ حاصل ضرب ۱ + ب - ۱ - ا اور ۱ + ب - ۱ - ا کا

۱ - ب - ۱ + (۱ + ب + ۱ - ب) - ۱ - ا اور قالب انکا مثبت قیمت جذر (۱ - ب - ۱ - ا) + (۱ + ب - ۱ - ب)
کی یعنی (۱ + ب) (۱ - ب) کی ہی اور اسکی یہی معنی ہیں کہ دو معلوم جملوں کے قالبوں
کا حاصل ضرب یہ قالب ہے

اور نیز جملہ ۱ + ب - ۱ - ا میں معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ۱ اور ب معدوم
ہو جائیں پس اب یہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملوں کا معدوم ہوتا، تو ایک جملہ
کا قالب بھی معدوم ہو جاتا ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملوں کا معدوم ہوتا،
تو خود ایک جملہ ہی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہو جاتا، تو اسکا حاصل ضرب بھی معدوم ہو جاتا،
(۲۷) جن طالب علموں نے خیالی جملوں پر توجہ نہ کی ہو اب وہ جبر مقابلہ کی جیسویں باب کو دیکھیں۔

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہیں کہ ہر ایک مساوات ایک قیمت کہتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی ہو + یہ بہتر معلوم ہوتا ہے کہ بالفصل طالب علم اس امر کو یوں تسلیم کر لی اور اگی کام چلائی اور اس باب کو اگی چھوڑ دی اور پھر جب کچھ اس سے کہ کو پڑھ لی تو پھر اس کو مطالعہ کری اور اس مسئلہ کے سمجھنے میں دقت نہ اٹھائی

(۲۸) اول ہم یہ ثابت کرتی ہیں کہ چاروں مساوات ذیل میں ایک ایک قیمت وجود رکھتی ہے خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

(۱) $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ میں ظاہر ہے کہ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ایک قیمت مساوات کی ہے
(۲) $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہے کہ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کی ایک قیمت مساوات کی ہوگی
اگر ن زوج ہو تو اس کو برابر ۲ م کی فرض کرو تو یہ ثابت کرتا ہوگا کہ مساوات $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کا ایک حل ہی اور ایک ہی معنی بھی ہیں کہ ہم یہ ثابت کر دیں کہ مساوات $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کا ایک حل ہی اسلئے ایک حل ہی باقی دو ذیل کی مساواتوں کی حل میں داخل ہو گیا
(۳) $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اگر ن طاق ہو تو اس کی دو صورتیں ۲ م + ۱ اور ۲ م + ۳ کی ہوں گیں
اول صورت میں $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ایک قیمت ہی اسلئے کہ $(\frac{1}{1} + 1) = \frac{1}{1} + 1$

اور دوسری صورت میں $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ایک قیمت ہوگی کیونکہ $(\frac{1}{1} + 3) = \frac{1}{1} + 3$
اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ م م کی برابر ہی ہیں م ایک طاق عدد ہی اور ع کوئی قیمت
ہ کی مثلاً $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کی رکھو تو مساوات $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ
 $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اور اب یہ ہم ثابت کر ائی ہیں کہ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ایک مناسب قیمت د کی ہے
اگر م کی صورت ۲ م + ۱ ہو اور $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ایک مناسب قیمت د کی ہے
اگر م کی صورت ۲ م + ۳ کی ہو اب ہم کو لا کی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ
جسے شرائط $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اور $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کی پوری ہوں آئیں ع = ۲

بیشتر طیکہ عمر مر + در ص صفر نہ ہو

اب ہم اول یہ فرض کرتے ہیں کہ عمر + فرض صفر نہیں ہی تو علامت $عُر + قُر - عُر - قُر$ وہی علامت ہے جو علامت $\neq 2$ (عمر + فرض) بدکا کی جسمیں لا کافی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتے ہیں کہ یہ علامت منفی بموجب اس فرض کے ہوگی کہ

اگر عمر + در ص مثبت ہو تو طر $\neq 1$ اور اگر عمر + در ص منفی ہو تو طر $\neq 1$

پس اس واسطے $عُر + قُر$ کو چھوٹا $عُر + قُر$ سے کر سکتے ہیں

دوم یہ فرض کرو کہ عمر + فرض صفر ہی تو بجای طر $\neq 1$ کے

فرض کرنی کی طر $\neq 1$ فرض کرو اور یہ ہوا فوق سابق کی عمل کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$عُر + قُر - 1 = 1 = 2 = (عُر + قُر - 1) \text{ بدکا } 1 + \dots$$

$$\text{پس } عُر = 1 = 2 = 3 = \dots$$

$$قُر = 1 = 2 = 3 = \dots$$

$$\text{اور } عُر + قُر = 1 = 2 = 3 = \dots$$

اس میں ارقام جنہیں بدکا سے بد کے اعلیٰ قوتیں ملتے ہوں نہیں لکھی ہیں

اب (عمر + فرض) $\neq 2$ (قمر - عمر) $\neq 1$ (عُر + قُر) (عُر + قُر)

اور یہ برابر صفر کی نہیں ہو سکتا اس واسطے کہ $عُر + قُر$ بموجب فرض کے برابر صفر کی نہیں ہے اور $عُر + قُر$

ثابت ہو چکا ہے کہ سوار صفر کے ہی پس اس سبب سے کہ عمر + فرض صفر ہے

قمر - عمر صفر نہیں ہی اس واسطے علامت $عُر + قُر - عُر - قُر$ کے علامت وہی ہوگی جو

علامت $\neq 2$ (قمر - عمر) بدکا کی ہی جسمیں بدکا فی چھوٹا فرض کیا گیا ہے اور ہم اس

بات کو یقینی جان سکتے ہیں کہ یہ علامت منفی بموجب اس فرض کی ہوگی کہ اگر عمر - عمر مثبت ہو تو

طر $\neq 1$ اور اگر قمر - عمر منفی ہو تو طر $\neq 1$ ہو اس واسطے ہم

$عُر + قُر$ کو چھوٹا $عُر + قُر$ سے فرض کر سکتے ہیں

اور ایک اور جز ضربی ع ہوگا کیونکہ مثال لاک کے ج (لا) میں ع سے پس

ج (لا) = ع (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ۱۸)

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = کی قیمتیں ہیں کیونکہ ن مقدار

۱ اور ۲ ... ۱۸ میں سے کسی کوئی مقدار بجای لا کی ج (لا) میں رکھیں تو وہ اسکو معلوم

کردگی اور اس مساوات کی قیمتوں سے زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلی کہ اگر لاک کے کوئی اور قیمت

میں جو قیمتوں ۱ اور ۲ ... ۱۸ میں سے نہ ہو مقرر کریں تو ج (لا) بہم ہو جائیگا

کہ ع (س - ۱) (س - ۲) (س - ۳) ... (س - ۱۸)

اب بہ صفر نہیں ہو سکتا اسلئے کہ ہر ایک جز ضربی اسکا مختلف صفر ہی اور حاصل ضرب باجزا ضربی کا

خواہ اصلی ہو یا خیالی ہو معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ کوئی جز ضربی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۴ کو دیکھو

(۳۴) دفعہ گذشتہ میں تمام قیمتیں کیا اصلی ہونگیں یا اس صورت $a + b$ کی قیمت ۱ اور ب اصلی

میں اور بعض قیمتیں ۱ اور ۲ ... ۱۸ میں برابر ہی ہو سکتی ہیں اسلی کہ چہ ضرور نہیں کہ ن درجہ کی

مساوات کی قیمتیں ہی ہوں شاید طالب علم اس بات پر متاثر نہ کری گا کہ ن درجہ کی مساوات

کی قیمتیں کس طرح ہو سکتی ہیں جب کہ انکا آپس میں مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہ کہتی ہیں کہ

آپس میں بڑی آسانی ہی کہ ن درجہ کی مساوات کی قیمتیں کی جائیں گے اور ان میں بعض قیمتیں

آپس میں برابر ہوں جسکا کہ جرمقابلہ میں مساوات درجہ دوم $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ میں بیان کیا گیا ہے

کہ جب $a^2 = 0$ تو اسکی دو برابر قیمتیں گنتی میں بہ نسبت ایک قیمت گنتی کی آسانی ہے

(۳۵) اب جو ہم فی مکان مساوی قیمتوں کے داخل ہونی کا بیان کیا اسکا اثر دفعات گذشتہ میں

صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اور دفعہ میں یہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی مختلف

بہ نسبت قیمتیں نہیں ہو سکتیں لیکن اس بات کو اثبات میں نہیں ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہو

اسکی برابر ایک قیمت یا کئی قیمتوں کا ہونا ممکن نہیں جب ہم دس کا رٹیر حسب کا قاعدہ علامت ثابت

کر سکیں اور وقت یہ بات ظاہر ہو جائیگی کہ مساوات جب پر بحث کی گئی ہی ایک قیمت گنتی ہی اور وہ مکرر نہیں آتی

(۳۶) اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت لائیم کہ معلوم ہو تو ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ
 ج (لا) = (لا - ۱) محرم لا آئین محرم لا ایک جملہ لا کا ایک درجہ کم ج (لا) سے ہے
 اور باقی قیمتیں ج (لا) = ۰ کی دریافت ہو سکتی ہیں اگر ہم مساوات محرم (لا) = ۰ کو
 جو مساوات ایک درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کی ہی حل کریں اور علیٰ ہذا القیاس اگر ہم کو قیمتیں (لا) اور (لا - ۱)
 مساوات ج (لا) = ۰ معلوم ہوں تو ہم کو معلوم ہی کہ ج (لا) = (لا - ۱) (لا - ۲) محرم (لا)
 آئین محرم (لا) ایک جملہ لا کا دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) کی ہی اور باقی قیمتیں ج (لا) = ۰ کی
 مساوات محرم (لا) = ۰ کی حل کرنی سی دریافت ہو سکتی ہیں یہ مساوات دو درجہ کم بہ نسبت
 ج (لا) = ۰ کے ہے اور علیٰ ہذا القیاس

(۳۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن درجہ کا ہو تو ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے
 کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی میں تحلیل ہونی کی اسی قابلیت رکھتا ہے کہ
 ج (لا) = ع. (لا - ۱) (لا - ۲) ... (لا - ن) (لا - ن + ۱)
 آئین (لا) و (لا - ۱) ... (لا - ن) کیا اصلی یا خیالی ہیں اس بات پر غور کرنی چاہیے کہ ج (لا) جن اجزاء
 ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے اس کا نظم ایک ہی ہوتا ہے جیسا کہ (لا - ۱) اور (لا - ۲) ... (لا - ن)
 سب غیر مساوی ہوں تو ایک نظم کا اجزاء ضربی میں ہونا ظاہر ہے مگر جب بعض مقادیر
 (لا - ۱) و (لا - ۲) ... (لا - ن) میں مساوی ہوں تو ج (لا) کی مختلف طور سے سطح ترکیب نہیں ہو سکتا
 کہ ایک ہی اجزاء ضربی کے مختلف قوت نامیوں اگر ہم ممکن ہو تو فرض کرو
 ج (لا) = ع. (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ۴) ...

اور ج (لا) = ع. (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ۴) ...
 اب فرض کرو کہ رٹ برابر ہی ہی تو (لا - ۱) پر تقسیم کرنے سے یہ حاصل ہوگا کہ
 ع. (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ۴) ... = ع. (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ۴) ...
 اب ایسے طرف کا رکن مساوات لا = کی ہونی ہی معدوم ہوتا ہے مگر بائیں طرف کا رکن معدوم

نہیں ہوتا اسلئے ان جملوں میں تطبیق نہیں ہو سکتی اسی ثابت ہوا کہ (لا) کی اجزا ضربی کا نظم کیا ہے ہوتا
(۸) اگر کوئی ن درجہ کا جملہ صحیحہ ناطقہ لاگان مختلف لاکے قیمتوں سے زیادہ قیمتوں سے ملدوم ہوتا ہو
تو جملہ میں ہر مثال صفر ہوگا اور جملہ ہی لاکے ہر قیمت کی موافق صفر ہوگا

(۳۵) دفعہ گذشتہ میں جو ثبوت لکھا ہے وہ مسئلہ کی اثبات کو موقوف اس بات پر کرتا ہے کہ مساوات ان دو
 زیادہ ہوں جبکہ معدوم نہ ہوگا پس اگر ان ہی زیادہ مختلف قیمتوں سے لاکر جبکہ معدوم نہ ہوگا تو یہ کیا مثال حملہ میں صفحہ پہلے
 اس واسطے کہ اگر حملہ لاین کو کسی مثال صفحہ پہلے تو لاکر مختلف قیمتوں سے جو تعداد میں ان سے

کی قیمتیں ہوتی ہیں اور آخر کار یہ مقدمہ باب دوم کی تحقیقات پر موقوف ہو جاتا ہے
لیکن یہی مسئلہ کو ہم استقراء ہی پہی ثابت کر سکتی ہیں اور یہاں اسکی واسطی ضرورت باب دوم کی تحقیقات کی ضرورت ہے
فرض کرو کہ لاکا جملہ جون درجہ کا ہو وہ ان سے زیادہ قیمتوں کے موافق معدوم ہوتا ہوا درجہ کے امثال
صفر سے تو اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتی ہیں کہ لاکا جملہ (ن + ۱) درجہ کا ن + ۱ مختلف قیمتوں کے زیادہ
قیمتوں سے معدوم ہوگا اور ہر ایک امثال جملہ میں صفر ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ق^(۱) + ق^(۲) + ق^(۳) + ... + ق^(ن) لا + ق
ا د فرض کرو کہ (ان + ۱) قیمتوں سے زیادہ قیمتیں لاکھی ج (لا) کو فنا کرتی ہیں اور ایک قیمت
ان قیمتوں میں ایسی ہی کنج (د) = کی ہوتا ہے تو ج (لا) = ج (لا) - ج (د)
$$= \text{ق}^{\cdot} (\text{لا} + ۱ - \text{لا}) + \text{ق}^{\cdot} (\text{لا} - \text{لا}) + \text{ق}^{\cdot} (\text{لا} - \text{لا}) + \dots + \text{ق}^{\cdot} (\text{لا} - \text{لا})$$

اسکو اس صورت سے لکھ سکتے ہیں کہ

$$(U) \mathcal{E}(1-U) = (U) \mathcal{E}$$

مج (لا) = ق. لا + (ق. لا + ق. لا) + (ق. لا + ق. لا) + (ق. لا + ق. لا) + ...
 پس ق. = کیونکہ لا کا امثال صفری پس ق. = کیونکہ لا - کا امثال صفر ہے
 تو ق. = کیونکہ لا - کا امثال صفری اور علیٰ ہذا القیاس
 پس ج (لا) میں ہر ایک امثال صفر ہے

اسی دعویٰ ثابت ہے کیونکہ ہم ہم کو معلوم ہے کہ وہ اول اور دوم درجہ کی جملوں کے صورت میں ثابت ہے
 (۴۰) اگر ج (لا) ن درجہ کا جملہ لا کا ہو تو ہم فی ثابت کر دیا ہے کہ ج (لا) اول درجہ کے اجزاء
 ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے ان اجزاء ضربی میں سی ہر ایک ج (لا) کو پورا تقسیم کر لگا
 توج (لا) کی مقسوم علیہ پوری باشتی والی ہونگی اور حاصل ضرب ان اجزاء ضربی میں سی کسی اجزاء
 ضربی کا درجہ دوم کا جز ضربی ج (لا) کا ہو گا اور اس کے

ج (لا) کی (لا - ۱) مقسوم علیہ پوری باشتی والی درجہ دوم کے ہونگی اور اس طرح عمل کرنے سے
 ہم کو معلوم ہو گا کہ ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری باشتی والی درجہ کی اوتنی ہونگی جتنی کہ اجتماع
 ن اشیا میں سی رشتہ کی ہوتی ہیں یعنی ج (لا) کی درجہ کے مقسوم علیہ پوری باشتی والی (لا - ۱) ... (لا - ۱) ہونگی
 لیکن اس بات کو بھی یاد رکھنا چاہیے کہ مقسوم کسی درجہ مثلاً دوم درجہ کی بیرون نہیں کہ مختلف ہی ہوں
 کیونکہ ہم پہلے فرض نہیں کیے کہ اول درجہ کی اجزاء ضربی سب مختلف ہوں غرض خلاصہ مطلب یہ ہے
 کہ ز درجہ کی مختلف مقسوم علیہ (لا - ۱) ... (لا - ۱) سے زیادہ نہیں ہو سکتی

(۴۱) مساوات حسین امثال اصلی ہوں اسکے قیمتوں میں خیالی قیمتوں کے ازواج ہو ہیں یعنی جوڑی ہو ہیں
 فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی حسین امثال لا کی سب اصلی ہیں پس اگر
 صہ + صہ - ۱ ایک قیمت مساوات ج (لا) = کی ہو تو ضروری ہے کہ صہ - صہ - ۱ = صہ - ۱ کی قیمت ہوگی
 اسو اصلی کہ جب صہ + صہ - ۱ کو لا کی جگہ جملہ (لا) میں رکھیں تو اسکی صورت
 ع + ق صہ - ۱ کی ہوگی حسین ع اور ق میں صہ کی جفت قوتیں ملکت ہیں
 یہ بات ظاہر ہے کیونکہ اگر لا کے جملہ کو پہلا لائن اور اوچین لا = صہ + صہ - ۱ = صہ - ۱ تو

صہ ۱-۳ کی قیمت اصل قیمتیں پیدا کریں گے اور ۱-۳ صہ کا تعلق طاق قواد ساتھ ہوگا

اور چونکہ ج (لا) کی مثال سب اصل مانی گئی ہیں ۱-۳ کا

کسی طرح سواء صہ کے طاق قواد کے نہیں واقع ہو سکتا

پس اگر سہ - صہ ۱-۳ بجای لا کی ج (لا) میں رکھا جائی تو وہ حاصل حاصل ہوگا

جو لا کی جگہ سہ + صہ ۱-۳ کی رکھنی حاصل ہوا تھا مگر او میں صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی

اسی واسطی حاصل ع - ق صہ ۱-۳ ہوگا پس اگر سہ + صہ ۱-۳ ایک قیمت ج (لا) =

کی ہو تو چاہی کہ ع = - اور ق = ۰ کے ہو سہائی مساوات

ع - ق صہ ۱-۳ برابر صفر کے ہوگا اس واسطی سہ + صہ ۱-۳ ابھی ایک قیمت مساوات

ج (لا) = - کے ہوگی

(۴۲) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور او میں اصل مانی ہوں اور ایک جز ضربی او سکا

لا - ۱ ہو اور او میں ۱ = سہ + صہ ۱-۳ کے ہو تو او سکا دوسرا جز ضربی

لا - ۲ ہوگا جس میں ۱ = سہ - صہ ۱-۳ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی

لا - سہ - صہ ۱-۳ اور لا - سہ + صہ ۱-۳ کا (لا - سہ) + صہ یعنی

لا - ۲ سہ لا + صہ + صہ ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصل درجہ دوم کا جز ضربی ہے

(۴۳) پس ہم کو پہنچے حاصل ہوا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جس میں اصل مانی ہوں یا خیال کر سکتے ہیں

کہ وہ حاصل ضرب اصل اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہوں یا درجہ دوم کی ج (لا)

اس صورت کا ہوگا کہ (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ک) ج (لا) اس میں

۱ اور ب اور س - - - کی سب اصل قیمتیں ج (لا) = کی ہیں اور ج (لا) وہ جملہ ہے جس میں

حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور او سکی علامت نہیں بدل سکتی

(۴۴) دفعہ ۴ کی طرح یہ دعویٰ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور مثال ہی

او سکی ناطقہ ہوں اور مساوات ج (لا) = کی قیمت ۱ + صہ کے صورت کے ہو تو

ق-۱۔ ان = حاصل ضرب کل ارقام - ۱۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰۰ کے
پس اسی ثابت ہوگا اگر قوانین مذکور - ۱ اجزاء ضربی کی ضرب دیتی میں باقی جاتی ہیں
تو وہ ان اجزاء ضربی کی ضرب سنی میں باقی جاتی ہیں مگر یہ ثابت کرانی ہیں کہ قوانین مذکور
چار اجزاء ضربی کی ضرب سنی میں باقی جاتی ہیں اس واسطی وہ پانچ اجزاء ضربی کی ضرب سنی بھی پانچ
جائینگے اور علیٰ ہذا القیاس پس ہ بالعموم سب صورتوں میں موجود ہونگے۔

اگر ۱۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰۰ کے قیمتیں مساوات

$$۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰ \text{ کے ہوں}$$

تو دائیں طرف کا رکن مساوات برابر ہوگا حاصل ضرب اجزاء ضربی (۱۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰۰) اور (۱۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰ - ۱۰۰۰ - ۱۰۰ - ۱۰)

کے اور اسی بہت ہی نتائج حاصل ہونگی اگر مساوات سادہ صورت میں تھوڑے دو سیری رقم کا امثال

تمام قیمتوں کی مجموعہ کی برابر ہوتا ہی مگر علامت بدلی ہوئی ہوتی ہی اور تیسرے رقم کا امثال

برابر ہوتا ہی دودو قیمتوں کی حاصل ضربوں کی مجموعہ کی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہیں

چوتھی رقم کا امثال برابر ہوتا ہی تین تین قیمتوں کی حاصل ضربوں کی مجموعہ کو مگر انکی علامتیں بدلی ہوئی

۔۔۔ آخر رقم برابر ہوتی ہی تمام قیمتوں کی حاصل ضرب کے مگر انکی علامتیں بدلی ہوئی

یا ہم ان قوانین کو اس طرح بیان کرتی ہیں کہ امثال دوسری رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہی برابر

تمام قیمتوں کی مجموعہ کی اور امثال تیسری رقم کا برابر ہی دودو قیمتوں کے

حاصل ضربوں کی مجموعہ کی اور امثال چوتھی رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہو برابر ہوتا ہیں تین قیمتوں کے

حاصل ضربوں کی مجموعہ کی پس بالعموم اگر عام معمول کی موافق امثال ۱۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰۰ مساوات میں ہو تو

$$(۱ - ۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰) = \text{حاصل ضربوں کے مجموعہ کے}$$

(۴۶) شاید کسی کی دل میں یہ خیال پیدا ہو کہ جو ارتباط اوپر بیان ہوئی ہیں اسی مساوات

منفرضہ کی قیمتیں ہم کو معلوم ہو جائیں کیونکہ انہی مساواتیں ایسی حاصل ہوتی ہیں جنہیں قیمتیں ملحق ہوتی ہیں

اور تعداد ان مساواتوں کی یہی اتنی ہی ہوتی ہے جتنی قیمتیں ہیں تو ان مساواتوں میں ہی سب قیمتوں کو در کر کے

ایک قیمت مہنی دین اور اس ایک قیمت کو دریافت کر لین لیکن جب ہم اور قیمتوں کو مساواتوں ہی دور کرتی ہیں تو مساوات مفروضہ ہی خود ہم کو دوبارہ حاصل ہو جاتی ہے اس واسطے کچھ فائدہ نہیں ہوتا مثلاً مساوات

$$۳ع + ۲ا + ۱ج = ۴ع - ۵ج$$

اور اس کے قیمتیں ادب وج فرض کرو تو

$$۱-۲-۳ = ۴-۵$$

$$۱ب + ۲ج + ۳ا = ۴ع - ۵ج$$

$$۱ب + ۲ج = ۴ع - ۵ج$$

اب ب اور ج کی دور کر کے ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہیں کہ جس میں فقط ا ہی ہو تو اس کی قیمت زیادہ ہاں ترکیب ہے کہ ان میں مساواتوں میں اول مساوات کو ا میں ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ا میں اور نیز مساوات کی ساتھ حاصل کو جمع کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$۲-۱-۲ = ۴ج + ۱ب + ۲ج + ۳ا = ۴ع - ۵ج$$

$$یعنی ۲ع + ۱ا + ۲ج = ۴ع - ۵ج$$

اب یہاں مساوات جو حاصل ہوئی وہی ہی جو مساوات مفروضہ تھی فقط فرق اتنا ہی کہ لاکھ ایک اور یہ بات سمجھنی کہ مشکل نہیں ہے کہ ارتباطات مذکور سی جب شہم اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ کی حاصل ہو گئی ہے کہ اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تھی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتوں کو تعبیر کرتی ہیں اور ان میں باہم کچھ تمیز نہیں ہے اسلئے جو مساوات کی استخراج کرینگے ان میں ا کی قیمتیں ہونگی کیونکہ

مساوات کی قیمتوں میں سی ہر ایک قیمت ہو سکتا ہے پس اسی ہم کو خوب یقین ہو گیا کہ امثال مساوات اور اس کی معلوم قیمتوں میں جو ارتباطات باہمی ہونگی ان پر جو اعمال جریہ اس نظری کی جائینگے کہ قیمتیں سوا ایک کے دور ہونگی اور اسی مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

جب اکی دیکھینگے تو ہم معلوم ہوگا کہ بہت سی تبدیلیاں مساوات معلوم کی بغیر اسکی قیمتوں کے معلوم ہونی کی ہو سکتی ہیں اور مثالوں سے معلوم ہوگا کہ یہ تبدیلیاں مساواتوں کی حل کرنے میں کام آتی ہیں (۵) ایک مساوات کی بہت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنا دوں کہ اسکی قیمتوں کے علاوہ بدل جائے فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات ہی اور د = - لا کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو د کی وہی قیمت تعداد ہو مگر علامت اسکی متضاد ہو پس لا = - د اور مساوات مطلوب ج (-د) = ۰ کے ہے

$$\text{اگر ج (لا) = ج با + ج با}^۱ + ج با}^۲ + \dots + ج با}^n = ۰ \text{ ع - لا + ع}$$

مساوات ج (-د) = ۰

$$\text{ع (-د) + ع (-د) + ع (-د) + ع (-د) + \dots + ع (-د) = ۰ \text{ ع - لا + ع}$$

یعنی ع - لا + ع - لا + ع - لا + ع - لا + \dots + ع - لا = ۰ ع - لا + ع - لا + ع - لا + ع - لا + \dots + ع - لا = ۰

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی بہت کو اگر اسطرح بدلیں کہ دوسری رقم سے شروع کر کے ہر ایک رقم کی علامت کو بدل دیں تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی آخرین جو قاعدہ بیان ہوا ہے اس میں مساوات مفروضہ کی اندر تمام قیمتیں وہ فرض کی گئیں ہیں جو اوپر دہر کی مساوات میں واقع ہوا کرتی ہیں یعنی کشتی کی کو صفر نہیں فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جس میں یہ بات نہ پائی جائے مثلاً یہ مساوات ہو کہ

$$۶ + ۳ - ۵ - ۲ - ۱۴ + ۷ = ۰$$

اسکو ایسی مساوات میں تبدیل کرنا ہو کہ جسکی قیمتیں باعتبار کمیت کی تو دی ہوں اس کی قیمتیں میں یہ علامتیں متضاد ہوں

$$۶ - ۳ - ۵ + ۲ + ۱۴ - ۷ = ۰$$

$$۶ - ۳ - ۵ + ۲ + ۱۴ - ۷ = ۰$$

اگر ہم چاہیں تو اصل مساوات کو اسطرح لکھیں کہ

$$۶ + ۳ - ۵ - ۲ - ۱۴ + ۷ = ۰$$

تو بموجب ماخذہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے قیمت بدل کر یہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$4 - 3x + 2y + 5z = 0 \quad (۵۲)$$

$$4 - 3x + 2y + 5z = 0 \quad \text{یعنی}$$

اور یہی مساوات سابق میں حاصل ہوئی تھی

مساوات میں جب وہ سب قیمتیں واقع ہوں جو اس درجہ کی مساوات میں واقع ہوتی ہیں یعنی کوئی مثال صفر نہ ہوں تو مساوات کامل کہتی ہیں اور کہی کہی ہی کام بہت نکلتا ہے کہ مساوات کو کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالین یعنی جو قیمتیں ہوں ان کو لکھیں اور مثال دیکھیں ہر ایک کی صفر بنائیں (۵۲) انک مساوات کی قیمت بدل کر دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتیں مساوات معروضہ کے

قیمتوں سے کچھ خاص گنی ہو یعنی خاص صناعت ہوں یا اجزا

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات مفروضہ اور مطلوب یہ ہے کہ اس مساوات کی قیمت بدل کر

دوسرے مساوات ایسی بنائیں کہ جسکی قیمتیں ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتوں سے ہو

و = ک ل کے مقرر کرو جب لاک کوئی خاص قیمت ہو تو و کی قیمت ک گنی ہوگی

پس لا = ک ل اور مساوات مطلوب ج (ک ل) ہے

(۵۳) مثلاً اس مساوات

$$3 - \frac{11}{4}x + \frac{5}{2}y = 0 \quad \text{کی}$$

قیمت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ک گنی ہوں لا = ک ل کے رکھو

اور ہر قیمت میں سب کو ضرب دو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$3 - \frac{11}{4}x + \frac{5}{2}y = 0$$

اس مثال سے ہم بتلائیے گئے کہ اس تبدیل قیمت کو کن کام میں لاسکتی ہیں مساوات مفروضہ میں

سب مثال صحیح نہیں ہیں تو ہم کی مناسب قیمت فرض کر کے مساوات کی ایسی قیمت بدل کر

دوسری مساوات پیدا کر سکتی ہیں کہ جہیں سب مثال صحیح اعداد ہوں

بدلی ہئت مساوات

۳۴

باجہا پریم

مفروضہ کی قیمتوں ہی بقدر ایک مقدار مستقل ہونے کی زیادہ ہوتی تو ہم کو نہ کر سب باقی پر عمل کرنا چاہیے
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = سی بغیر ہو اور د = لا + ص کے فرض کرو تو

لا = د - ص اور مساوات مطلوب ج (د - ص) = ۰ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ میں - ص
بجای کی کر کہو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہ بات دفعہ گذشتہ
کی بیان میں ضمناً ثابت ہوگی اسلی کلاس دفعہ میں ہم کچھ ضرورت نہیں کہ ک قطعاً مثبت مقدار ہے ہو
(۵۴) دفعہ ۴ میں ج میں تبدل ہئت کو ہم فی حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فائدہ یہ ہے کہ ایک مساوات
مفروضہ میں سی جس رقم کو ہم تعین کریں معدوم ہو جائے

مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات میں دوسرے رقم کو معدوم کرنا چاہیں تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتے ہیں
کہ $ع + ۱ن = ک$

یعنی ک = $\frac{ع}{۱}$ ہو اور اگر ہم یہ چاہیں کہ بدلی ہوئی مساوات د میں تیسری
رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسرے درجہ کی مساوات سے دریافت کریں کہ
 $ع + ۲(۱ - ن) = ک + \frac{ن(۱ - ن)}{۲ \times ۱} = ۰$

اب بالعموم یہی کہ بدلی ہوئی مساوات د میں (۱ + ر) دین رقم نہ رہی
تو ہم ک کو اس درجہ کی مساوات سے دریافت کریں کہ

$ع + ۱ن = ک + ۱ + \frac{ن(۱ - ر)}{۱ - ن} + ۲ + \frac{ن(۱ - ر - ر)}{۱ - ن} = ۰$
اب ہم اگلی بیان کرینگے کہ مساواتوں کی حل کرنی میں بڑی سہانی کسی خاص رقم کی اڑا دیتی ہو جائے

(۵۵) مثلاً مساوات لا - ۴ + ۴ + ۴ + ۵ = ۰ کی ہئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
اوسمیں دوسری رقم نہ ہو یہاں $ع = ۱۱$ اور $۱ - ۲ = ۱$ پس ک = ۲ اور مساوات مطلوب
 $۰ = (۲ + ۵) - ۳ + ۴ + (۲ + ۵) + ۲ + ۵ = ۰$

یعنی $۰ = ۳ - ۵۸ - ۳$

اب پہلے مساوات لا - ۲ + ۴ + ۴ + ۵ = ۰ کی ہئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو

تو مساوات ج (۳) = ہم ہوگی کہ

$$ع. \frac{1}{2} + ع. \frac{1}{3} + ع. \frac{1}{4} + \dots + ع. \frac{1}{n} - ع. \frac{1}{n} + ع. \frac{1}{n-1} + \dots + ع. \frac{1}{3} + ع. \frac{1}{2} = 0$$

آفاق اور مجذور سے ہم کو ہم حاصل ہوگا

$$(ع. \frac{1}{2} + ع. \frac{1}{3} + ع. \frac{1}{4} + \dots + ع. \frac{1}{n}) = (ع. \frac{1}{n} + ع. \frac{1}{n-1} + \dots + ع. \frac{1}{3} + ع. \frac{1}{2})$$

جب طرفین مساوات کو شہ جاکھینک تو وہ صوب طریق پیدا کریں گے اور جب سب رقموں کو ایک طرف لے آئیں گے تو ہم حاصل ہوگا کہ

$$ع. \frac{1}{2} + (ع. \frac{1}{3} - ع. \frac{1}{2}) + (ع. \frac{1}{4} - ع. \frac{1}{3}) + \dots + (ع. \frac{1}{n} - ع. \frac{1}{n-1}) = 0$$

(۴) مساوات کی تبدل شدت کی اور بہت سی صورتیں ہو سکتی ہیں مگر ہم فی اوسبقہ لکھی ہیں جسقدر کہ

اس مطلب کے سمجھنی کی لگی کافی ہیں دفعہ ۴۵ میں جن ارتباط کا بیان ہوا ہی اونکی توضیح کے

واسطی دو مثالیں لکھ کر اس بات کو ختم کرتے ہیں

(۱) مساوات ۱ + ۲ + ۳ + ... + n = n(n+1)/2 کی بیت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں

مخرد مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے تفاوت کا ہو

فرض کرو کہ ۱ اور ۲ اور ۳ قیمتیں مساوات کی ہوں تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \quad ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱ \quad ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۲ \quad \dots$$

اسی واسطے ۱ + ۲ + ۳ = ۲ - ۱

اور بیت بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں (۱-۲) اور (۲-۳) اور (۳-۴) ہیں

$$۱ - ۲ = ۱ - ۲ \quad ۲ - ۳ = ۲ - ۳ \quad ۳ - ۴ = ۳ - ۴ \quad \dots$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۲ - ۱ \quad ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۲ - ۱ \quad ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۲ - ۱$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۲ - ۱$$

پس اگر ۱ = ۲ - ۱ + ۲ - ۱ + ۲ - ۱ + ... اوس حالت میں کہ لا کی قیمت ح ہو تو

قیمت ۱ کی (۱-۲) ہوگی اور علیٰ ہذا القیاس جب لا کی قیمتیں ۱ اور ۲ ہوں

بدلی ہیت مساوات

۳۹

باجی پرم

تو قیمتیں کی (ب-ج) اور (ا-ب) ہوگی پس ہیت بدلی ہوئی مساوات
مساوات مفروضہ اور مساوات ۱ = ۲ + ق + ۳ - لائیں لائی دو کرنی سی حاصل ہوگی
اور یہ لادور اسطرح ہوگا کہ

$$۰ = ۳ + ق + لا + ر =$$

$$۰ = اور لا + (۲ + ق + لا) - ۲ = ر$$

$$۰ = اسٹو (ق + لا) - ۳ = ر$$

پس لا = ۳ + ق مساوات مفروضہ میں اس قیمت کو مندرج کرو تو آخر کار یہ مساوات حاصل ہوگی
۳ + ق + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ = ۰

اسی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ۲ + ق مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ کے ہیت بدلی ہوئی
مساوات کی قیمت ایک مثبت منفی ہوگی اور اسٹو مساوات مفروضہ کی دو خیالی قیمتیں
ہونگیں کیونکہ یہی ایک زوج قیمتوں کا ہوگا تو
ہیت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے

اگر ۲ + ق ۳ صفر ہو تو ہیت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اسٹو
مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتیں ہونگیں

(۲) مساوات لا + ع + لا + ق + لا + ر = ۰ کی ہیت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ

جسکی قیمتیں مخدور مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا ہو

$$لا = لا - ع رکھو تو مساوات مفروضہ ہو جائیگی کہ$$

$$(لا - ع) + ع + (لا - ع) + ق + (لا - ع) + ر = ۰$$

$$یعنی لا + ق + لا + ر = ۰$$

$$آئیں ق = ق - ع ر = ۳ - ع ق + ر$$

آخر مساوات کی ہر ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ہر ایک قیمت موافق نظر کی بقدر ع کی زیادہ

موس کا رئیس کا قیامہ علیہ السلام کا

باسمہ

اسو اسطی آخر مساوات کی قیمتوں کے مجز و ردن کا تفاوت دی ہی ہو گا جو مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجز و ردن کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہی کہ

$$= {}^1G_4 + {}^2G_4 + {}^3G_4 + {}^4G_4 + {}^5G_4$$

يعني $3 + 2(س - ع) + 1(س - ع) + 5(ع - 9 + ق + ٢٤ + ١) + ١(٣ - ع) =$

باب پنجم ڈس کلرئیس کا قاعدہ علامات کا

(۶۱) دفعات ۲۱-۲۲ میں ہم نے مثالیں ایسی بیان کیں ہیں کہ جنہیں ج (۱۱) کے

امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات (لا) = کی قیمتوں کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہے

ابہم اول چندہ و دیان کرینگی اور بعد ازان مسائل عامہ کی تحقیقات لکھینگے

(۶۲) اگر ایک سنگ رقام کی ہو اور یہ ایک رقم کی اول علامات + اور - سے کوئی ایک ہو تو مفاد یہ ہے

بالترتیب خیال کرنے میں جب ایک قسم کی وحی علامت ہو جو اس کی رقم کا قبل کی علامت ہی تو اس کو تو اس کے ہنگامے

اور جب ایک قوم کی علامت اپنی رزم ناقبل کی علامت سے مخالف ہو تو اس کو تغیر کہنیے مثلاً

جمله ۱۸- ۱۷- ۱۶- ۱۵- ۱۴- ۱۳- ۱۲- ۱۱- ۱۰- ۹- ۸- ۷- ۶- ۵- ۴- ۳- ۲- ۱- ۰

اولیٰ قواۃ - ۴ لایر دوسری قواۃ + ۳ لایر اور تیسری قواۃ + ۲ لایر ہے

اور چوتھا۔ لا پرا اور اول تغیر۔ ۳ لا اور دوسرا۔ ۴ لا پرا اور تیسرا۔ لا پرا اور چوتھا۔ اپد واقع ہوا۔

یہ ظاہری کہ جیسا وات کامل ہو تو اسکی مجموعہ توازن اور تغیر کی تعداد وں کا اس عدد کی برابر ہوگا

جو مساوات کا درجہ تیل راہی دفعہ ۱۵ دیکھو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل میں - لاجبائی لاکھ رکھ دین تو نئی مساوات میں اصلی مساوات کی

تغیر تو اتیر نچا ئیگی اور تو اتیر تغیر ہو جائیگی مساوات ج (لا) =۔ مین جو کامل نہ ہو ج (لا)

اور ج (ب) کی تغیرات کی تعدادوں کا مجموعہ ایسا عدد نہیں ہوگا کہ مساوات کی درجہ ہی شرحہ کیا

وجہ اسکی یہ ہے کہ جب ج (لا) میں بعض ارقام معدوم ہوں تو یہ ممکن ہے کہ ج (لا) اویج (-لا) کے

تغیرات کی تعداد کم ہو جائے مگر اس کا زیادہ ہونا ناممکن ہے

باب پنجم
۲۱
ابن تیمیہ کا مسئلہ کا بیان کرتی ہیں اور اسکو ثابت بھی کرتی ہیں اسکو دس کارس کا قاعدہ علامہ کا
دس کارس کا قاعدہ علامہ کا

(۴۳) کسی مساوات میں خواہ وہ کامل ہو یا ناقص تعداد مثبت قیمتوں کی مثال کی تغیرات علامات کی
تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی اور کسی مساوات کامل میں تعداد منفی قیمتوں کی مثال کی تو اکثر
علامات کی تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی

اول ہم ثابت کریں گے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم فرضی لا۔ میں ضرب دیں تو کم از کم
حاصل ضرب میں ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہو گا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات ++ +--- +--- +--- +--- ہیں
اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی ہیں ضربے یا ہمارا وہی علامتیں +۔ ہیں اب اگر ان علامتوں
کو لیکر عمل ضرب کا کریں تو یہ حاصل ہو گا کہ

+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+
									-	+
+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+
+	+	-	+	-	+	+	+	-	-	-
-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+

دوہری علامت وہاں لکھی جہاں کہ حاصل ضرب میں علامت کی اندر ہشتابہ تھا

اب یہاں یہ قوانین نظر آتے ہیں
(۱) اصلی کثیر الارقام میں ایک تو اس کی مقابل میں جدید کثیر الارقام میں ایک علامت مشترکہ کی واقع
اور دونوں میں تعداد علامات کی یکساں ہے

(۲) جدید کثیر الارقام میں علامت مشترکہ کی باقی اور بالبعد کی علامتیں تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید میں آخر میں ایک تغیر زیادہ ہو گیا ہے

اب کثیر الارقام جدید میں ایک صورت ایسی لو کہ وہ سب زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات
مشترکہ کی جگہ تو انزات کو رکھو تو بموجب قانون دوم کی تو اس کی تعداد میں کچھ فرق ہی نہیں پڑے گا
علامت مشترکہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتیں کثیر الارقام جدید میں گزر

اینگلی کے حسب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا اکثر الارقام جدید کا اخر میں زیادہ داخل ہو جائیگا پس جب ایسی صورت مخالف میں ایک تغیر علامت کا اکثر الارقام جدید میں نسبت اصلی اکثر الارقام کے زیادہ ہو گیا تو او صورتوں میں کیوں نہ ہوگا

اب اگر ہم یہ فرض کریں کہ ایک مساوات کی منفی اور خیالی قیمتوں کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کے ایک مثبت قیمت کی مطابق جز ضربی میں ضرب میں تو کم از کم ایک تغیر علامت کا او میں داخل ہو جائیگا اسبوا کے مساوات میں تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتوں کی تعداد نہیں ہو سکتی اب ڈس کا رئیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جزو ثابت کرتی ہیں فرض کرو کہ مساوات کامل ہے تو بجای لا کی - اور کہنی سی مثبت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل تو اکثر تغیرات علامت میں بن جائیگی اور ایسا بدل ہوئی مساوات کی مثبت قیمتیں بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہیں ہو سکتیں اور اسکی اہم معنی ہیں کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتوں کی تعداد اسکی تو اکثر علامت کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی (۴۴) خواہ مساوات ج (لا) = ۰ کامل ہو یا نہ ہو اسکی قیمتیں بلحاظ یکیت کے برابر مساوات

ج (- لا) = ۰ کے قیمتوں کی ہوتی ہیں مگر علامت میں مخالف یعنی منفی قیمتیں
ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتیں ج (- لا) = ۰ کی ہوتی ہیں خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو
ج (- لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی تعداد ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی پس کل قاعدہ علامات کا اس طرح مختصر بیان ہو سکتا ہے کہ ایک مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتیں تعداد میں ج (لا) کے تغیرات علامت کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی اور اسکی منفی قیمتوں کی تعداد ج (- لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی

(۴۵) مثلاً مساوات لا^۲ + لا^۳ - لا^۵ - لا^۷ = ۰ ہو یہاں ایک تغیر علامت اسو اصلی ایک مثبت قیمت

سی زیادہ مثبت قیمتیں نہیں ہو سکتیں اور لا کی جگہ - لا لکھو تو یہ مساوات

لا^۲ + لا^۳ - لا^۵ - لا^۷ = ۰ کی حاصل ہوئی اس میں ایک تغیر علامت کا ہی اصلی اسکی ایک

ایک مثبت قیمت سے زیادہ کو بھی اور مثبت قیمت نہیں ہو سکتی اور اسے اصلی مساوات کی کوئی منفی قیمت نہیں ہو سکتی۔
 منفی قیمت ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی پس اصلی مساوات کی حقیقی قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں۔
 اس مثال میں مجموعہ دفعہ ۲ کی ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے۔
 اور یہی ہم فی الحقیقت کر کے لکھا ہے کہ ایک سے زیادہ ہر ایک قیمت نہیں ہو سکتی۔
 اب ہر مساوات $۳ + ۲ + ۱ = ۰$ پر خیال کرو اور اس میں ۱ اور ۲ دونوں مثبت ہیں۔
 اب یہاں کوئی تغیر علامت نہیں ہے اس واسطے اس کی کوئی مثبت قیمت نہیں ہے اور ہر دفعہ ۲۲
 کی موافق ہی ظاہر ہے اور اگر ہم لاکھین تو مساوات میں ایک تغیر علامت کا ہو گا
 تو اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سے زیادہ کوئی منفی قیمت نہیں ہو سکتی اس واسطے مساوات کی
 دو خیالی قیمتیں ہیں۔

اب ہر مساوات $۳ + ۲ = ۰$ پر خیال کرو اور اس میں ۱ اور ۲ دونوں مثبت ہیں۔
 اب یہاں دو تغیر علامت کی ہیں اس واسطے دو مثبت قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں۔
 اور اگر لاکھین تو مساوات ایسی حاصل ہو گی کہ اس میں ایک تغیر علامت ہو گا پس اصلی
 مساوات کی ایک منفی قیمت سے زیادہ کوئی منفی قیمت نہیں ہو سکتی۔

اس مثال میں مجموعہ دفعہ ۲ کی ہم اس بات کو جانتی ہیں کہ ایک منفی قیمت اس کی ہے اور یہ
 اب ہم فی الحقیقت کر کے لکھا ہے کہ ایک سے زیادہ منفی قیمت نہیں ہو سکتی اور باقی دو قیمتیں حقیقی
 مثبت مقدار ہیں یا خیالی مقدار ہیں ان کو ہم دس کارٹس کے قاعدہ علامت سے نہیں دریا کر
 لیکن مجموعہ دفعہ ۲ کی ہم نتیجہ یہ لکھتا ہے کہ مساوات جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کے
 قیمتوں کی مجزوروں کی اوقات کی برابر ہوں یہ ہے کہ $۳ + ۲ + ۱ = ۰$
 اور دس کارٹس کے قاعدہ علامت اور دفعہ ۲۲ کی موافق اگر $۳ + ۲ = ۰$ منفی ہے
 تو آخر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہیں ہو گی اور اس واسطے اصلی مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہیں ہو گی
 اور اگر $۳ + ۲ = ۰$ مثبت ہے تو آخر مساوات کی مجموعہ دفعہ ۲ کے کوئی منفی قیمت نہیں ہوتی کی

اسو اسطی صلی مساوات کی دو خیالی قیمتیں ہو سکتیں
(۴۴) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہی کہ دفعہ ۲۴ میں جو نتائج لکھے ہیں وہ بالکل ٹرس کا ٹرس کے
قاعدہ علامتا کی مطابق ہیں اور اس کے سبب متبطل ہو سکتی ہیں اور دفعہ ۲۲ میں جو دعوی ثابت کیا ہے
وہ بھی قاعدہ دس کا رئیس میں داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سے یہ بات بھی معلوم ہوتی ہے
کہ دفعہ ۲۲ میں جس مساوات پر بحث ہوئی ہے اس کی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمت ہو سکتی ہے
خواہ برابر ہوں خواہ نا برابر

(۴۵) دس کا ٹرس کے قاعدہ علامتا میں یہ ثابت ہوا ہے کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی میں
جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب مینی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہو سکتا ہے
اب یہ بیان کیا جاتا ہے کہ تغیرات علامتا کی جو داخل کئی جاتی ہیں تعداد میں طاق ہوتی ہیں
اسو گے کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام میں آخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت
کی اصلی کثیر الارقام میں جفت یا صفر ہونی چاہی اور کثیر الارقام جدید میں آخر علامت - ہی
تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہی اسی معلوم ہوتا ہے کہ تغیرات علامت جو داخل
کئی گئی ہیں وہ طاق ہیں جفت کا طاق جب ہے بنتا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ آخر علامت اصلی کثیر الارقام میں - ہی تو کثیر الارقام جدید میں آخر علامت
+ ہوگی تو اصلی کثیر الارقام میں تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید
میں تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسو گے کہ تغیرات جو داخل کئی گئی ہیں ان کی تعداد طاق ہوگی
(۴۸) اگر سب قیمتیں مساوات ج (لا) = کی تحقیقی ہوں تو تعداد مثبت قیمتوں کی برابر

ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتوں کی برابر ج (- لا) کے
تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتوں کی ہی اور م تعداد
منفی قیمتوں کی اور م تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی

اور موقوفہ تغیرات علامت ج (لا) کی چونکہ تمام قیمتیں مساوات کی تحقیقی ہیں
اسلیٰ م + م = ن اور م زیادہ موسیٰ اور م زیادہ موسیٰ بموجب دفعہ ۴۳ کے نہیں ہو سکتا
اسیٰ م + م = م + م = ن اس واسطیٰ کہ مجموعہ م و اور م و کا زیادہ ن ہی نہیں ہو سکتا
پس م + م = م + م = م + م اور م + م نہ زیادہ موسیٰ ہو سکتا ہی اور نہ کم موسیٰ ہو سکتا ہے
اسلیٰ کہ اگر کم ہو تو م بڑا موسیٰ ہوتا ہی اور یہ ناممکن پس م = م اور م = م ہو سکتا
(۴) فرض کرو کہ مولعہ تغیرات علامت ج (لا) کی ہو اور موقوفہ تغیرات علامت ج (لا)
ہوں تو مساوات ج (لا) = کی مثبت قیمتوں ہی زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتی اور موسیٰ زیادہ
منفی قیمتیں نہیں ہو سکتی اور اس واسطیٰ کہ موسیٰ تحقیقی قیمتیں زیادہ نہیں ہو سکتیں یہ معلوم ہوا کہ
اگر ن زیادہ م + موسیٰ ہو تو مساوات ج (لا) = کے کم از کم
ن = م - م و خیالی قیمتیں ہو گئیں دو دفعات اندہ میں ہم بہت توضیح کے ساتھ اس بات کو
بتلائے گئے کہ جب مساوات کامل نہ ہو تو اسکی خیالی قیمتوں کی تعداد کیا ہوتی ہے
(۵) اگر کسی مساوات میں ایک صنف ارقام کی موجود نہ ہو تو حتمی رقموں کی تعداد اس صنف میں
ہوگی اتنی ہی کم از کم خیالی قیمتیں اس مساوات کی ہوں گیں
فرض کرو کہ ج (لا) میں درمیان لا اور لا - ۲ + ۱ کے ایک صنف ۲ رقموں کی موجود
نہ ہو تو مساوات ج (لا) = کی کم از کم خیالی قیمتیں ۲ ہوں گیں فرض کرو کہ
ا اور ب مثال لا اور لا - ۲ - ۱ کو ج (لا) میں تغیر کریں اور ارقام جو موجود نہ ہیں
وہ مثال ق اور ق اور ق کے ساتھ داخل کیجائیں تو اس جملہ میں
لا + ق + لا - ۱ + ق + لا - ۲ + ۰ + ق + لا - ۲ + ب + لا - ۲ - ۱
میں تغیرات علامت کی تعداد مع تواثرات علامت کی تعداد کی ۲ + ابھی اسکو یوں بیان
کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد چھین علامت لا کی
بدلی جائی ملکہ برابر ۲ + اکی ہیں اب جو ارقام فرضیہ داخل کی ہیں انکو ساقط کرو

تو اگر اورب کی مختلف علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت کا ج (لا) میں ہوگا اور ج (لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اور اگر اورب کی یکساں علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت ج (لا) میں ہوگا اور ج (لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اس واسطے دو صورتوں میں ۲ رقموں کی ساقط ہونے سے ج (لا) اور ج (لا) میں نقصان ۲ تغیرات علامت کا واقع ہوتا ہے

اور یہ قاعدہ تمام صنف منقوص پرچہ میں صنف ارقام ہوں حاوی ہی پس ہی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = کی اتنی خیالی قیمتیں ہیں جسے کہ تعداد رقموں کی اس صنف منقوص میں ہے (۱۷) اگر کسی مساوات میں ایک صنف طاق ارقام کی موجود نہ ہو پس اگر یہ صنف منقوص ایسی دور رقموں کے درمیان واقع ہی کہ او کی علامتیں یکساں ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی بقدر ایک کے کم از کم زیادہ ہوگی اور اگر صنف منقوص ایسی دور رقموں کی درمیان واقع ہی کہ او کی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کے تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی کم از کم بقدر ایک کے کم ہوگی فرض کرو کہ ج (لا) میں درمیان لا اور لا ۲-۲

کے ۲+ ارقمیں موجود نہیں ہیں اور لا اور لا ۲-۲ کی مثال اورب علیحدہ علیحدہ ہیں پس اگر اورب کی یکساں علامت ہی تو مساوات ج (لا) = کی ۲+۲ خیالی قیمتیں ہوں گیں اور اگر اورب کی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات ج (لا) = کی ۲-۲ خیالی قیمتیں ہوں گیں فرض کرو کہ ارقام منقوصہ مثال ق اور ق ۲ اور ق ۲-۲ داخل کیجا میں تو جملہ لا + ق لا + ۱ + ق لا ۲-۲ + ۰ + ق ۲ + لا ۱-۲ + ۰ + ب لا ۲-۲

میں تعداد تغیرات علامت کی مع تعداد تغیر علامت کی ۲+۲ میں یا اس مطلب کے اس طرح ادا کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد حسین کہ لا کی علامت بدل دیجائی ملکر ۲+۲ میں اور جب ارقام فرضہ جو دخل کیں تہیں خارج کی جائیں تو اگر اورب کی یکساں علامتیں ہیں تو ج (لا) اور ج (لا) میں کوئی تغیر علامت نہ ہوگا

اور اگر اورب کی علامتیں متضاد ہوں تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (سلا) میں واقع ہوگا
اسوٹے ج (لا) میں ۲+ ارقموت کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (سلا) کی تعداد تغیرات
علامت میں سی ۲+۲ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر نصف منقوص ارقام متحد علامت کے درمیان واقع ہو
اور ۲ تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر نصف منقوص ارقام مختلف علامت کی درمیان واقع ہو
اور یہ قاعدہ تمام اصناف منقوصہ پر قیمتیں تعداد ارقام طاق ہوں حاوی ہے
اسوٹے مساوات ج (لا) = کی کم از کم اتنی قیمتیں خیالی ہونگیں جیسا کہ دعویٰ میں بیان کیا
(۷۲) اب دفعہ ۱ کی بہرہ ایک مثال ہی لگا کر ج (لا) میں دو قیمتیں یکساں علامت کی ہوں اور
اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی دو ناممکن قیمتیں ہونگیں اور اگر ایک رقم ایسی
دو رقموں کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتیں متضاد ہوں تو اسی نتیجہ ہم تبہیں نکال سکتی
کہ اوسکی خیالی قیمتیں کتنی ہیں

اب اس بات پر یہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقوصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (سلا) کے
تغیرات علامت کی تعداد چھوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دونوں تعدادوں کا
حاصل تقریبی جفت عدد ہوتا ہی

دفعہ ۷۰ اور ۷۱ کی دو ممکن صورتوں کی مچان کرنی سی یہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی
یعنی اگر طریقہ کتابت تھا دیر کو موافق دفعہ ۷۱ کے اختیار کریں تو عدد ۷۰ - مو - ہو ہمیشہ
ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۷۱ کی ہم کو اسی نتیجہ کی نگہنی کی پہلی سی توقع تھی

بائشتم مساوی قیمتیں

(۷۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونگی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتیں کہتی ہے
ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جانتی سی آسانی ہو تی ہی چنانچہ یہ بات
اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہو جائیگی اسوٹے اب اس بات کو بیان کرینگے کہ سطح
مساوات کی متساوی قیمتوں کو تحقیق کرتی ہیں اور سطح ادن اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتوں کی مساوات میں ہوتی ہیں خارج کر کے مساوات کی
تحویل ایسی مساوات کی طرف کر لیتی ہیں کہ اس کی قیمتیں غیر مساوی ہوتی ہیں اول ہم ایک خاصیت
جملہ معلوم کی اول جملہ شتقہ کی ثابت کرتے ہیں

(۷۴) اگرچ (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لاکا ہوا اورخ (لا) اس کا اول جملہ شتقہ ہو تو یہ ہوگا کہ

$$\frac{ج (لا)}{لا - ا} + \frac{ج (لا)}{لا - ب} + \frac{ج (لا)}{لا - ج} + \dots + \frac{ج (لا)}{لا - ک} = ج (لا)$$

اس میں اور ب اور ج ... ک خیالی اور حقیقی قیمتیں مساوات ج (لا) = کی ہیں
وجہ اس کی یہی ہے کہ ج (لا) میں لاکہ اعلیٰ قوت کا سرعہ فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۳ کے
ہم کو یہ متطابقہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = ع (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) \dots (لا - ک) \quad (۱)$$

د + می بجای لاکے رکھو تو

$$ج (د + ی) = ع (د + ی - ا) (د + ی - ب) (د + ی - ج) \dots (د + ی - ک)$$

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ میں ہوا فن قوا و متضادہ کی پہلا و تو بموجب دفعہ ۱۲ کے
دائیں طرف کی یہ صورت ہوگی کہ

$$ج (د) + ج (د + ی) + ج (د + ی + ج) \dots + \frac{ج}{۲ \times ۱} (د + ی + ج + \dots)$$

پس سری کا ج (د) ہی اور اس سے ج (د) برابر ہوگا بائیں طرف میں ی کی سری کے یعنی

$$ع (د - ب) (د - ج) \dots (د - ک) + ع (د - ا) (د - ج) \dots (د - ک) + \dots$$

$$\frac{ج (د)}{د - ا} + \frac{ج (د)}{د - ب} + \frac{ج (د)}{د - ج} + \dots + \frac{ج (د)}{د - ک}$$

اور مفادیر متغیر کی واسطی ہر مرکز کو کام میں لاسکتی ہیں جس کی کچھ قیمت ہو اس کی د کو لاسی
بدلتی ہیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = \frac{ج (لا)}{لا - ا} + \frac{ج (لا)}{لا - ب} + \frac{ج (لا)}{لا - ج} + \dots + \frac{ج (لا)}{لا - ک} \quad (۲)$$

اب ہم نتیجہ اوس صورت میں بھی صیح ہی کہ مفادیر اور ب و ج ... میں

ایک یا کئی برابر یا برابر کی ہو . . . اور علیٰ ہذا القیاس
اب کل میں فرض کرو کہ ایک ردفعہ اور ب ٹھیک ض دفعہ اور ج ٹھیک ط دفعہ . . . واقع ہوتا ہے
(۱) کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$\text{ج (۱)} = \text{ع (۱-ا)} (\text{ب-ا}) (\text{لا-ح}) \dots$$

اور (۲) کو اس طرح لکھ سکتی ہیں

$$\text{ج (۱)} = \frac{\text{ج (۱)}}{\text{ا-ا}} + \frac{\text{ب (۱)}}{\text{ب-ا}} + \frac{\text{ط (۱)}}{\text{ط-ا}} + \dots$$

(۴۵) اگر ج (۱) اور ج (۱) کا کوئی وقف مشترک جس میں لا متفق ہو گا تو مساوات ج (۱) =
کے برابر قیمتیں ہونگی اور اگر وقف مشترک نہ ہو گا تو کوئی برابر قیمت نہیں ہوگی
فرض کرو کہ ا اور ب وج . . . یک حقیقی یا خیالی قیمتیں مساوات ج (۱) = کے میں تو
ج (۱) = ع (۱-ا) (ب-ا) (لا-ج) . . . (ک-ک)

$$\text{توج (۱)} = \text{ع (۱-ا)} (\text{ب-ا}) (\text{لا-ج}) \dots (\text{ک-ک}) (\text{لا-س}) \dots$$

اگر ا اور ب اور ج . . . یک تمام غیر مساوی قیمتیں ہوں تو اجزاء ضربی (۱-ا) (ب-ا) (لا-ج)
لا-ج و . . . لا-ک میں کو جو ضربی ج (۱) کو نہیں تقسیم کر لیا وجہ اسکی یہ ہے کہ
لا-ا ہر ایک رقم ج (۱) کو پورا تقسیم کرنا ہی مگر اول رقم کو نہیں تقسیم کرتا
اور علیٰ ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی میں سی حاصل ضرب بھی
کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہیں پورا تقسیم کر لیا اشیائے ثابت ہو کہ اگر ج (۱) اور ج (۱)
کوئی وقف مشترک نہیں رکھتا تو ج (۱) کوئی مساوی اجزاء ضربی نہیں رکھتا پس معلوم ہوا کہ
اگر ج (۱) اور ج (۱) وقف مشترک رکھتی ہوں تو ج (۱) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی نہیں ہو سکتی
دوم فرض کرو کہ مساوات ج (۱) = کی برابر قیمتیں ہیں اور ردفعہ ا اور ص دفعہ
اور ط دفعہ ج اور علیٰ ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

$$\text{ج (۱)} = \text{ع (۱-ا)} (\text{ب-ا}) (\text{لا-ج}) \dots \left[\frac{\text{ط}}{\text{ط-ا}} + \frac{\text{ص}}{\text{ص-ا}} + \dots \right]$$



ماوی قسین

AT

اگر مساوات ج (لا) = کی ایک سی زیادہ قیمتیں برابر کی رکھتی ہو تو اسی نتیجہ نکلی گا کہ ج (لا) کو لا - لا پر تقسیم کرنی ہی خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = اسی معدوم ہوتا ہے پس موافق دفعہ کے خارج قسمت کی نکالنے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$= n \cdot x \cdot (1-x)^{n-1} + \dots + x^n - n \cdot x^{n-1} + \dots - n \cdot x + 1$$

یعنی ج (لا) فاما ہو جائیگا جب لا = ا کے ہو

(۸۱) پس اسی ہی معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = کی برابر قیمتوں کا دریافت کرنا منظور
 خاطر ہو تو ہم غار سطح کریں کہ + وفق مشترک عظم ج (لا) اور ج (لا) کا دریا کریں اور اس وفق مشترک عظم کو
 برابر صفر کر لکھ کر مساوات بنائیں تو بہر ایک مساوات حل کرنی کی لمی ایسی حاصل ہو جائیگی کہ جسکی قیمتیں وہ
 ہوں گیں جو مساوات ج (لا) = کی مکر قیمتیں ہیں اور چونکہ یہ وفق مشترک عظم خود ایک پیچیدہ
 جملہ ہو سکتا ہے جس میں اجزاء اور ضربیہ مساویہ ملتے ہوں اس واسطی یہیہ فائدہ مند ہو گا کہ
 ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتھ کریں کہ قیمتیں حتی الامکان تھوڑی سی سخت سی حاصل ہوں
 اور اب اس بات کو ہم لکھتی ہیں

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ۱۰ ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتیں ہوں اور

$$\delta^1 \delta^2 \delta^3 \delta^4 \delta^5 = (1) \in G$$

اسمین حاصل ضربی اون تمام اجزاء ضربی کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہیں کلاسی اور حاصل ضربی اجزاء ضربی کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہیں کلاسی اور حاصل ضربی اجزاء ضربی کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہیں کلاسی اور علیٰ ہذا القیاس تبصرہ ہونی میں اگر کوئی جز ضربی ج (۱۱) میں ادنیٰ دفعہ نہ آیا ہوگا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک ماکی مقدار دیر

۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

ابجد (لا) سی اول جملہ مشتق (لا) کا حاصل کرو اور ہر دفعہ مشترک اعظم (لا) اور
 (لا) کا حاصل کرو اس دفعہ اعظم کو (لا) سے بغیر کرو

ج (لا) = سلام لا یہ سلام سلام - ۱
 اور بزرگ و رفیع عظم ج (لا) اور اس کی اول جملہ شتق ج (لا) کا حاصل کرو اور
 اس کو ج م (لا) سے بغیر کرو

تو ج (لا) = لا لا ... لا لا ... لا لا ...
اسی طرح متواتر عمل کئی جاؤ تو

$$\mu_1 \delta \cdots \delta \mu \delta = (0)_{\mu \delta}$$

$N_{\text{max}} \rightarrow \delta \dots \delta \quad (1) \quad N_{\text{C}}$

$\delta =$ (11) ج. م. 1

ج ۱ (۱)

اب لیک نیا سلسلہ جملوں کا اس طرح تبدیل کرو کہ سلسلہ

ج (۱۱) وج (۱۱) وج م (۱۱) - ج م (۱۱) - - -

ہر رقم کو ج م (۱) تک اپنے مافیل کی رقم پر تقسیم کر تو ہر حاصل ہوگا کہ

$$= \frac{C(1)}{C(2)} = 0.5 = 50\% \text{ مقرر کرد } (1)$$
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ م } = \text{م ج (ک) کے مقرر کردہ}$$
$$\frac{م-۱}{م-۲} = \frac{۱-۱}{۱-۲} = \frac{۰}{-۱} = ۰$$
$$\text{مجم (u) کے مقرر کردہ} = \frac{u - 1}{u} = \lambda$$

پس آخر کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\delta = \frac{\text{مجموع } (U)}{\text{مجموع}} \dots \delta = \frac{\text{مجموع } (U)}{\text{مجموع}}, \delta = \frac{\text{مجموع } (U)}{\text{مجموع}}$$

اور لاہور کے غرض اجراء دھڑی کا اور لاہور کا مام اب علیحدہ علیحدہ ہو گئی اور مسدوداتوں

۱ = ۱۰ اور ۲ = ۱۰۰ اور ۳ = ۱۰۰۰ کے حل کرنے سے قیمتیں

اسی ہم کہتے ہیں کہ ایک مساوات جس کے یا پانچویں درجہ کی جسمیں مثال مضامیر ناطقہ محدودہ ہوں اور اسکی کوئی قیمت ناطقہ محدودہ نہ ہو تو اسکی برابر کوئی قیمتیں نہیں ہوں گیں اور اگر مساوات چوتھی درجہ کی ہو اور اسکی مثال ناطقہ محدودہ ہوں اور کوئی قیمت اسکی ناطقہ محدودہ نہ ہو اور پھر اسکی برابر قیمتیں ہوں تو اسکی دو قیمتیں غیر ناطقہ ہوں گیں اور ہر ایک دو دفعہ کرانگی پس اگر

ج (لا) = مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

سا توان با مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی اور قیمتوں کا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکھتی ہیں جنسی پہ درت ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتیں حدود غائی کی ہیں واقع میں اور ہر پریم اس بات کی تحقیق کرینگے کہ قیمت کی جدا جدا حد غائی دریافت کرنی کہاں تک ممکن ہے اور ایسی ایل کی لکھنی کا قائدہ یہ ہے کہ چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ حل جریہ نہیں حاصل ہو سکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتوں کا تقریباً حاصل ہوتا ہے اور اسکی شتاسی ہم مساواتوں کا اعداد میں حل کر سکتی ہیں غرض ان حدود غائی کی معلوم ہونی ہی قیمتوں کی معلوم ہوگا اور پھر اوس مساواتوں کا حل چوتھی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اسی باب میں ہر جگہ قیمت سی حقیقی قیمت سمجھا اگر کہیں اسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتوں کے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتی ہیں کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہے تو اوسے یہ ہوتی ہے کوئی مثبت قیمت مساوات کی اوس مقدار سی زیادہ نہیں ہو سکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادہ صورت میں ہو اوس میں جو منفی مثال سب سے بڑا تعداد ہو کو سب سے بڑا تعداد کہتے ہیں اور اسی سے بڑا تعداد اعلیٰ حد غائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات ن درجہ کی ہے اور تعداد اعلیٰ سے بڑا منفی مثال ج (لا) میں ہے پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجائی کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق ہو اور اوسے تمام بڑی قیمتوں کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) = کی مثبت

باب ہفتم
۵۷
کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غامبی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لاکے

$$(1 + \nu + \dots + \nu^{n-1} + \nu^{n-1} + \nu^{n-1} + \nu^{n-1}) \varepsilon - \nu$$

کو ثبت نبادی تو وہ بدرجہ اولیٰ ج (لا) کو ثبت بنائی یعنی لاکہ قیمت قیمت سی ج (لا) ثبت ہوتا ہی
اگر ل - $\frac{1}{1}$ ثبت ہی اور جب یہ ثبت ہی تو ل - $\frac{1}{1}$ اس کے ل - $\frac{1}{1}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ مثبت‌ها و b و d مثبت‌ها باشند، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ معادل $a \cdot d = b \cdot c$ است.

درجہ اولیٰ مثبت ہی یعنی اگر (لا - ا) (۱ - ۱۱) مثبت ہی اور آخر جملہ مثبت ہوگا اگر لا - ا بڑا عیسیٰ ہی لیس رج (لا) مثبت ہی اگر لا برابر ع + ا کے ہو

اگر لا۔ ابڑاع سی سی لیس ج (لا) مثبت ہی اگر لا برابر ع + ا کے ہو

(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = ۰ میں بجای لا کی۔ مندرجہ کریم اور ن طاق عدد ہوں تو

(۸۸) اگر مساوات $(لا) =$ میں بجائی لاکھی۔ مندرجہ کرین

ہر قسم کی ایسی علامت بدل دو کہ Δ کا سر + Δ ہو اور فرض کر دو کہ اس صورت کی مساوات کا
 ق تعداد سب سے بڑا منفی سر ہو تو $Q + 1$ اعلیٰ حد غائی کی مثبت قیمتوں کے ہوگی

قائد ادا سب سے بڑا منفی سرمو توق + اعلیٰ حد غائی کی مثبت قیمتوں کے ہوگی

اور اس پر $(1+q)$ حد غائی لاکھ منہ قیمتوں کی ہے

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = کی سبقتیں درمیان ع + ا اور - (ق + ا) کو واضح ہو چکی ہیں۔
پس اگر مساوات میں تعداد اس سے بڑی مثال بغیر لحاظ علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام سبقتیں

پس اگر سوات میں تعداد اس سے بڑی مثال بغیر لحاظ علامت کی م

درمیان م + ا و - (م + ا) کے واقع ہونے

(۸۹) اگر مساوات نہ درجہ کی اپنی سادی صورت میں ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی مثال کی مع ہو اور ان سب سے بڑی درجہ کی قوت لاکھ ہو جو منفی مثال رکھتی ہو تو + سماع

ع ہوا اور ان سے بڑی بڑی قوت لاکھ ہو جو منفی مثال رکھتی ہو تو +

اعلیٰ حد خدائی مثبت قیمتوں کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات معروضہ ہو چونکہ تمام یحین بائبل لا کے مثبت مسائل
 کہ کہتی ہیں توج (لا) یقینی لا کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

کر رہی ہیں توجہ (۱) یقینی لاکھ مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

ثابت ہو یعنی اگر $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ثابت ہو پس لاٹرا واحد سی فرض کرو

ثابت ہو یعنی اگر $n = \frac{n-1}{n-1} = 1$ ثابت ہو پس لاٹراواہ

باب ہفتم

حدود غامبی قبیلوں کی

54

اس واسطی چاہی کہ لائبریریہ نسبت $\frac{ع+ع}{ع+ع+ع+ع+ع}$ کی اور

مثلاً بنسبت ع + ح + ج + د ع - ا
۱+ ... کی ہو اس پر واسطی اگر لا قیامت

اس حصہ جملوں میں ہی سب سے بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جائے تو وہ قیمت لاکھ اور آدھی ہر ایک کے لیے

ج (لا) کو نسبت بنا ٹیکگی یعنی ان جملوں میں ہی سب سے بڑا جملہ علی حد غامبی مساوات ج (لا) =

کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۹۱) ابان قاعدوں کی توضیح دو مثالوں سے کرتی ہیں اول یہ مساوات کو

$$= 1A - 1B54 + 1B51 - 1B1N - 1B1A + 0$$

بموجب فقہ ۸ کی ۵۳ + یعنی ۵۸ اعلیٰ حراغائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ

۸۹ کی اس سب سے کہ لا = ۱۵ اور ۲ تو حذف فاعلی + ۱۳۵ ہی یعنی ۹ حذف فاعلی ہے

اور جو بی فقہ ۴۰ کی ان جملوں $1 + \frac{18}{1+8}$ اور $1 + \frac{52}{1+8}$ اور $1 + \frac{127}{1+8}$

مین جبے بڑا جملہ لینا چاہی یعنی $\frac{23}{4} + 1$ اسی معلوم ہوا کہ حد غائی ہے

اب پیہ مساوات لو کہ

$$= 4 - 1 + 5 + 5 - 5 - 1$$

یہاں دفعات ۸۷ اور ۸۹ سی ۷۰ + ۱۰۰ جلد غائی ہی اور بموجب دفعہ ۹۰ کے $\frac{4}{7} + 1$

حاصل ہوتا ہے، اسی معلوم ہوا کہ ۱۹ صد عائی ہے

پس دو نمونہ لون میں دفعہ 40 سی اعلیٰ حد غائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہے اب یہ بات اسانی

معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۸۹ سی بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہے مگر = ا کے

صورت مستثنیٰ ہی کہیں دو نوحد و غائی میں تطبیق ہو جاتی ہی علی العموم دفعہ ۸۴ زیادہ کام

دستی ہا جس اکثر مثبت مثال مثالیہ اول کے واقع ہوں جسکی سبب سے بڑا ہو جاے

اور دفعہ ۹۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی ضرغائی معلوم ہوتی ہے مگر یہ صورت مستثنیٰ ہے کہ

سب سے بڑی منفی مثال کی باقیل ایک ہی مثبت مثال پہ یعنی اولی ہی رقم ہو اس صورت میں

دو نوحه و دس تطبیق ہو جاتی ہی علی الخصوص دفعہ ۹ و ۱۰ زیادہ کام دینی ہی کہ مثال متبہ اقبل مثال

مشفی کی واقع ہوں

منفی کی واقع ہوں
(۹۲) بعض حکمتیں ایسی ہیں کہ ہم اکثر قواعد عامہ کی نسبت اعلیٰ حد عائی چھوٹی دریا کر لیتی ہیں
دفعہ گذشتہ کی اول مثال پر خیال کرو اب یہاں واجب (۱۱) = کی مثبت قیمتوں کی حد اعلیٰ دریا کرنی ہے
اسمین ج (۱۱) کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$\left(\frac{q}{r\lambda} - u\right) \Delta q + \left(\frac{10}{\lambda} - u\right) \Delta \lambda + (5r - 7u) \Delta r$$

اب اگر لا برابر کی یا اوس کسی بڑی قیمت کی برابر ہو تو خطوط وحدانی کی مابین جملہ سب مثبت ہیں اور ایسی ہی ج (لا) مثبت ہے پس ہر اضافی مساوات ج (لا) کے مثبت قیمتوں کی ہے اب دفعہ مذکور کی دوسری مثال پر خیال کرو کہ اوسمین ج (لا) کو اس طرح لکھ سکے ہیں کہ

$$لا^۴ - (لا^۵ - لا^۳) + لا^۲ + لا - لا = لا$$

$$L = -U + U_F + (13 - U\Delta - U)U$$

اب دفعہ ۶ کی امدادی ہم دیکھتی ہیں کہ لا - ۵ لا - ۱۳ مثبت ہی اگر لا = ۱۳ + ۱

یا اسی بڑی قیمت کی پرساوات ج (لا) = کی مثبت قیمتوں کی ۱۲ اعلیٰ حد کا سہ ہے

(43) اب بہت سانی سے مساوات کی مثبت قیمتوں کی حدغائی دریافت کر سکتی ہیں

یعنی ایسا عدد دریافت کر سکتی ہیں کہ وہ کسی مثبت قیمت سی مساوات کی بڑا نہ ہو

مساوات کو بہت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں منکافی مساوات مفروضہ جہاں بدل

اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد خالی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کے

ادنی صدغانی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ مساوات مفروضہ یہ ہو

$$= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$$

لاکھی جگہ ۱۰۰ روپے اور ۱۰۰ روپے ضرب دو اور عن پر تقسیم کرو تو بدلی ہوئی مساوات یہ حاصل ہوگی کہ

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

اب دفعات گذشتہ میں کسی ایک دفعہ کی موافق اعلیٰ حد غائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اس کو سولہ سی تعبیر کرو تو ان ادنیٰ حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ہوگی اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸ کی موافق اعلیٰ حد غائی دریافت کرنی ہیں اور غائی کو سب سے بڑا مثال منفی تعداد بدلی ہوئی مساوات میں مانتی ہیں تو $\frac{18}{24}$ اعلیٰ حد غائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور اس واسطے مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ادنیٰ حد غائی $\frac{18}{24}$ ہے یہاں $\frac{18}{24}$ واقعی تعداد اس سے بڑا مثال مساوات مفروضہ میں ہی جو $\frac{18}{24}$ سے علامت میں اختلاف رکھتا ہے

مثلاً دفعہ ۹ میں $\frac{18}{24} = 18$ اور $\frac{18}{24} = 54$ پس $\frac{18}{24} = 18 - 54$ یعنی $\frac{18}{24}$ یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی حد غائی $\frac{18}{24}$ ہے

(۹۴) مساوات ج (لا) = کی منفی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو لاکھ - لکھو اور اس طرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہوا وہی مثبت قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو تو یہ حدود غائی جسکی علامتیں بدلی ہوئی ہیں مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی حدود غائی ہوئیں مثلاً مساوات

$$- ۱۸ - ۱۵ + ۳ + ۱۲ + ۱۸ = ۰$$

میں - ۱۸ کو بجائی لا کے رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$- ۱۸ - ۱۵ + ۳ + ۱۲ + ۱۸ = ۰$$

بموجب دفعہ ۹ کے $\frac{18}{24} + ۱۵$ یعنی اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ ۹ کے $\frac{18}{24} - ۱۵$ ادنیٰ حد غائی منفی قیمتوں کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان - ۱۵ اور $\frac{18}{24}$ کے واقع ہوئیں

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی کی دریافت کرنی کی کوشش کریں اور

اوسکو نیچے کی ترکیب کہیں

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات کو تعبیر کرنا ہی جس پر ہم اب بحث کرتے ہیں لاکے جگہ ۵ + ۵

لکھو اور ج (۵ + ۵) کو بموجب دفعہ ۱۲ کی پہلا و مساوات کی صورت یہ ہو جائیگی کہ

$$ج (۵) + ۵ ج (۵) + \frac{۱}{۲} ج (۵) + \dots + \frac{۱}{۱۰۰} ج (۵) =$$

اب فرض کرو کہ مثبت ہی اور اوسکی قیمت ایسی ہی کہ ج (۵) اور ج (۵) اور ج (۵) ... ج (۵)

سب مثبت ہیں تو کسی کوئی مثبت قیمت اوپر کی مساوات کی شرائط کو پورا نہیں کریگی

لیکن ۵ = لا - ۵ چونکہ مثبت نہیں ہو سکتا تو لا بڑا ۵ سے نہیں ہو سکتا پس ۵

ایک اعلیٰ حد غائی مساوات ج (لا) = کی مثبت قیمتوں کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی

مساوی صورت میں ج (۵) ہی تو ضرور مثبت ہوگی اور برابر ۵ ہوگی

(۹۶) مثلاً یہ مساوات لو کہ

$$۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

$$ج (۵) = ۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

$$ج (۵) = ۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

$$\frac{۱}{۲} ج (۵) = ۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

$$\frac{۱}{۱۰۰} ج (۵) = ۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

$$\frac{۱}{۱۰۰} ج (۵) = ۵ + ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ = ۵۰۰ + ۵۰۰$$

اب ہمیں آسانی ہی کہ آخر حبلہ ۵ سے شروع کریں اور باقاعدہ اگے بڑھیں کوئی سی مثبت

قیمت ۵ کی ج (۵) کو مثبت بناتی ہی ۵ = اکے ج (۵) کو مثبت بناتی ہے

۵ = ۲ کے ج (۵) کو مثبت بناتی ہی اور ۵ = ۴ کے ج (۵) کو مثبت بناتی ہے

اور ۵ = ۵ کے ج (۵) کو مثبت بناتی ہی تو اسی پہنچ دریافت ہوتا ہی کہ ۵ = ۵

سب سے پہلے جملوں کو مثبت بناتی ہی اس واسطے مساوات مفروضہ کی مثبت جملوں کی اعلیٰ حدود غائی سے کہ اس بات پر یہی غور کرنی چاہی کہ جس ترکیب کے موافق ہم آخر جملہ سی جلتی ہیں اور صہ کی قیمت مناسب اور کی جملوں میں بڑھاتی جاتی ہیں اور میں یہ کچھ ضرور نہیں کہ ہم سچی کی جملوں کو چکی مٹا کا یہی فیصلہ ہو چکا ہی اور کو دوبارہ پھر اس قیمت صہ کی موافق چاہیں مثلاً فرض کرو کہ ہم نے یہ تحقیق کر لیا ہے کہ صہ کی خاص قیمت تمام جملوں کو ج (لا) تک مثبت بناتی ہی تو صہ کی کوئی بڑی قیمت رکھو مثلاً ۱ + ب تو اس سبب سے کہ

ج (۱ + ب) = ج (۱) + ب ج (۱) + $\frac{1}{2} \times 1$ ج (۱) + ...
 میں تمام قیمتیں دائیں طرف مثبت ہو چکی فرض کی ہیں تو ج (۱ + ب) بھی مثبت ہی بن جائے گی گذشتہ میں جب یہ دریافت ہو گیا کہ صہ = ج (۱) + ب ج (۱) کو مثبت کرتا ہی تو اس کی اب ضرورت نہیں رہی کہ ہم اور جملوں کو بھی دریافت کریں کہ وہ مثبت بناتا ہی یا نہیں کیونکہ اس کی یہی ہم کو یقین ہو جاتا ہے کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۴۷) اب ہم تمیہ بیان کر دیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتوں کی حدود غائی سطح اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہیں اب ہم بعض مسائل لکھتی ہیں جنہی کہ مقام قیمتوں کا جو مفروضہ یا مجموعہ لیا جائے معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون کی سسٹم کے ضابطہ میں آگئی لکھی ہے

(۴۸) اگر ہم ج (لا) میں لاکھ جگہ متواتر دو مقداریں پر کریں اور ان مقداروں کے درمیان مساوات ج (لا) = ... کی قیمتیں جن کا شمار طاق ہو واقع ہوں تو ہم کو نتائج مختلف علامت حاصل ہوگی اور اگر ہم ج (لا) میں لاکھ جگہ متواتر دو مقداریں مندرج کریں جنکی درمیان مساوات ج (لا) = ... کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہوں تو ان کا شمار صفت ہو تو نتائج متحد علامت حاصل ہونگے فرض کرو کہ لرا اور لودو مقداریں ہوں جنہیں لرا بڑا ہو اور لودو ب ... کہ تمام حقیقی قیمتیں مساوات ج (لا) = ... کی ہوں جو درمیان لرا اور لودو واقع ہیں تو یہی وجہ ہے کہ ۴۲ کی یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . . (لا - ک) مر (لا)

اس میں مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کبھی اپنی علامت نہیں بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کبھی ایسی حالت میں نہیں بدلتی کہ

لا درمیان لرا اور لو کے واقع ہو

لرا اور لو کو بجائی لا کے متواتر کہو تو

ج (لر) = (لر - ا) (لر - ب) (لر - س) . . . (لر - ک) مر (لر)

ح (لو) = (لو - ا) (لو - ب) (لو - س) . . . (لو - ک) مر (لو)

اب تمام اجزاء ضربی لر - ا اور لر - ب اور لر - س . . . لر - ک مثبت ہیں اور تمام اجزاء ضربی

لو - ا اور لو - ب اور لو - س . . . لو - ک منفی ہیں اور مر (لر) اور مر (لو)

کی ایک ہی علامت ہی ہے جو اے (لو) اور ح (لو) متحد علامت ہونگے اگر اوب و ح

. . . کہ قیمتوں کا شمار جمع ہوا اور مختلف علامت ہونگی اگر قیمتوں کا شمار طاق ہو

(۹۹) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) میں بجائی لا کی دو مقدار متواتر کہیں اور اوتسی نتائج مختلف علامت

پیدا ہوں تو ان دو مقداروں کی درمیان اوت ح (لا) = کی قیمتیں جدا شمار طاق ہو واقع ہوں گیں

اور اگر اوتسی نتائج متحد علامت پیدا ہوں تو ان دو مقداروں کے درمیان اوت مذکور کی کوئی قیمت نہیں

واقع ہوگی یا تین قیمتیں واقع ہوں گیں جدا شمار جمع ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ۱۵ کا نتیجہ ہے

(۱۰۰) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہی کہ دفعہ ۹۸ کے اثبات میں یہ ضرور نہایت ہے کہ قیمتیں

اوب و ح . . . کہ سب غیر مساوی ہوں اس بات کو یاد رکھنا چاہی کہ جو قیمت م دفعہ

اتی ہوا کو م قیمتیں شمار کرتے ہیں

ہم لکھ رہے ہیں کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد علامت ہوں تو مساوات ج (لا) = کی

کیا تو کوئی قیمت درمیان لرا اور لو کے نہیں واقع ہوگی یا واقع ہوں گیں تو ان کا شمار جمع ہوگا

اب فرض کرو کہ اس متطابقہ کی ہر رکن کی صورت مفصلہ قوائم متضادہ میں لکھی جائی تو مثال جی

دائیں طرف ح (ر) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور مثال ی کی بائیں طرف

$$[(ر-ب) (ر-س) \dots (ر-ک) + (ر-ب) (ر-س) \dots (ر-ک) + \dots]$$

$$+ (ر-ا) (ر-ب) (ر-س) \dots (ر-ک) (س-ر) (ر)$$

ہوگا ان جی کی مثال کو برابر لکھو اور گولاسی بدل کر متطابقہ میں لکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ح (لا) = [(لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) + (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک)]$$

$$+ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) (س-لا) (ک)$$

اب متواتر ادب وس . ک کو لای جگہ رکھو تو آخر رقم متطابقہ کی بائیں طرف کی ہر صورت میں

معدوم ہو جائیگی اور سیواسطی علامتیں ح (ا) اور ح (ب) اور ح (س)

$$\dots ح (ک) کی وہی علامتیں ہیں جو (ا-ب) (ا-س) \dots (ا-ک) د (ب-ا) (ب-س) \dots (ب-ک)$$

$$\dots (ا-ا) (ا-ب) (ا-س) \dots (ا-ک) (س-ا) اور یہ علامتیں علی التبادل مثبت اور منفی ہیں$$

یعنی ایک مثبت دوسری منفی پھر تیسری مثبت اور چوتھی منفی اور علی ہذا القیاس اس واسطے کہ اول جملہ کا کوئی جزئی

منفی نہیں ہی اور دوسری جملہ کا ایک جزئی منفی ہی اور تیسری جملہ میں دو اجزاء ضربی منفی ہیں

اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۴ کی مساوات ح (لا) = کی قیمتیں جنکا

تھما رطاق ہو مساوات ح (لا) = کے متصل کی قیمتوں کے درمیان واقع ہیں

(۱۰۳) دفعہ گذشتہ میں قیمتیں ا و ب وس . ک کے سیلابیم غیر متساوی ہیں اب فرض کرو

کہ قیمت ا مکرر دفعہ اور قیمت ب مکرر ص دفعہ اور قیمت س مکرر ط دفعہ اور علی ہذا القیاس ح (ا)

تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ح (لا) = (لا-ا) ح (لا-ب) ح (لا-س) \dots (س-لا) (س-ر) (ا)$$

$$+ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) (س-لا) (ک) + \dots$$

$$+ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) (س-لا) (ک)$$

فرض کرو ح (لا) وفق اعظم ح (لا) اور ح (لا) کا ہی معنی یہہ فرض کرو کہ

ح (لا) = (لا - ا) - ا (لا - ب) - ا (لا - س) - ط - ا -

$$\left[r(l-a)(b-a)(s-a) + \dots + v(l-a)(l-a)(s-a) + \dots \right] \frac{a(l)}{a} = \frac{a(l)}{a} \text{سر (لا)}$$

+(لا-ا)(لا-ب)(لا-س) . . . (لا-م)

اس جملہ کو (۵) تکرار کرو تو موافق سابق کی یہ تحقیق ہوگا کہ مساوات ج (۱۱) = ۰ کی

ایک قیمتیں جبکہ شمار طاق ہو اور ب کی درمیان اور دس کے قیمتیں جبکہ شمار طاق ہو اور ب کی درمیان

ور علیٰ هذا القياس واقع بین اور چونکہ ح (لا) ح (لا) ح (لا) ہم حاصل ہی توجہ سوف ح (لا) معلوم

ہوگا لوح (لا) یہی معدوم ہوگا پس اسوات ح (لا) = کی قیمتیں جنگی تعداد طاق ہو

ساوات ح (لا) = کی سرحد متصل کی غیر مساوی قیمتوں کی درمیان واقع ہیں

ساوات (۱۱) :- کی مساوی قیمتوں کی نسبت ہم یہ جان سکتے ہیں کہ قیمت اور رد و فیہ مساوات

ج (لا) = مین اسی ہی قدر - دفعہ میا و اس ح (لا) = مین اتنی ہی اور علی ہذا القیاس اور

یہ تین حصے دفعہ مکرمیا و اسٹح (لا) = مین ایٹی ہی ص -۱ دفعہ مسوا و اسٹح (لا) = میں مکرمیا و اسٹح

اور علی ہذا القیاس

یعنی بڑی آسانی ہوگی کہ ہم یوں خیال کریں کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت لاکھ برابر

قسمتیں ہوں اوسمیں رہا ہوں ایسی ہوتی ہیں کہ اونہیں ہی ہر ایک میں خ (لا) =

قیمت اکی کرواقع ہوتی ہی اور یہی کیفیت اور کمرہ فہمیتوں کی ہی پس اس خال سی ہم کو یقین داتی ہوگا

نمونه ۱۰۲: کاد دعوی عام بی خواه مساوات ح (۱۱) = یکی نهمین برابر بودن با ما برای

(۱۰۱) مساوات ح (۱۱) = کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں مساوات ح (۱۱) = کی کوئی سی دراصل

ہیمنوئ کے درمیان نہیں واقع ہو سکتیں اس واسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں ہوں تو ایک

تساوی قیاسی نتائج (لا) کی اونکی درمیان واقع ہونگین تو مساوات ج (لا) = ۰ کی

تین جو بموجب فرض کے متصلہ تین متصلہ نہ رہیں

اور ایسی ہی مساوات ح (لا) = کی سب سے بڑی قیمت سے بڑی قیمت مساوات ح (لا) = کی ایک ہی ہو سکتی ہے اور مساوات ح (لا) = کی سب سے چھوٹی قیمت سے چھوٹی قیمتیں بہت سی ہو سکتی ہیں۔ (۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = کی سب سے کم قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات ح (لا) = کی بھی سب سے کم قیمتیں حقیقی ہوں لیکن اسو اسی کہ دوسرے مساوات پہلی مساوات سے درجہ میں ایک کم ہے اور ہر ایک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہے اور علی العموم اگر مساوات ح (لا) = کی کم قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات ح (لا) کی لقمہ م - ۱ حقیقی قیمتیں ہوں لیکن اور اسی زیادہ بھی قیمتیں ہو سکتی ہیں

(۱۰۶) چونکہ ح (لا) اول جملہ مثلاً ح (لا) کا ہی تو مساوات ح (لا) = کی قیمتیں جتنا شمار طاق ہو وہ مساوات ح (لا) = کی ہر متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہوں لیکن پس اگر مساوات ح (لا) = کی کم قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتیں اور مساوات ح (لا) = کی کم از کم م - ۲ حقیقی قیمتیں ہوں لیکن اسی طریقہ کے مراعت سے پہنچے حاصل ہوتا ہے کہ اگر مساوات ح (لا) = کی کم قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتیں ہوں لیکن

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات ح (لا) = کی تو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم تو خیالی قیمتیں ہوں لیکن اسو اسی کہ اگر مساوات ح (لا) = کی تو خیالی قیمتوں سے کم قیمتیں ہوں تو اسکی ن - ۱ حقیقی قیمتوں سے زیادہ قیمتیں ہوں لیکن درجہ ہا کا ہی مساوات ح (لا) = کی ن - ۱ حقیقی قیمتوں سے زیادہ قیمتیں ہوں لیکن اور چونکہ یہ مساوات ن - ۱ درجہ کی ہے اسلی اسکی قیمتیں خیالی نہیں ہو سکتیں اور یہ خلاف فرض کے ہے مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لا (۱ - لا) ن

مساوات ح (لا) = کی تمام اصل قیمتیں ہیں یعنی ن برابر کے ہی یا برابر کی ہی اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = کی تمام ن اصل قیمتیں درمیان ۱۰ اور اکی واقع ہوں لیکن اور یہ مساوات بہت کم

$$0 = 1 - \frac{C}{P} + \frac{C}{P} \frac{(1-C)}{P \times 1} - \frac{C}{P} \frac{(1+C)}{P \times 1} + \dots$$

(۱۰۷) اگر مساوات ح (لا) = کی تمام حقیقی قیمتیں معلوم ہوں تو مساوات ح (لا) =

کی نسبت یہ تحقیق کر سکتی ہوں کہ اس کی اصل قیمتیں کتنی ہیں فرض کرو کہ مساوات ح (لا) =

کی قیمتیں صد و صد و کرو۔۔۔ کہ بہ ترتیب تنازلی ملحوظ مقدار کی جبر مقابلہ میں مرتب کی جائیں اور ح (لا) میں

لا کی جگہ صد و صد و دلز۔۔۔ کو متواتر کر دو اور جو نتائج حاصل ہوں ان کی علامتوں پر خیال کرو

اگر نتائج مختلف علامت ہوں تو مساوات ح (لا) = کی ایک قیمت ان قیمتوں میں سے دو متصل

کی قیمتوں میں واقع ہوں گی اور اگر متحدہ علامت ہوں تو کوئی قیمت دو متصل کی قیمتوں کے درمیان

نہیں واقع ہوں گی دفعات ۱۹۸ اور ۱۰۴ کے دیکھو

مساوات ح (لا) = کی ایک قیمت بڑی جبر مقابلہ میں بہ نسبت صد کی ہوگی اگر چہ (صد) منفی ہو

اور کوئی قیمت بڑی نہ ہوگی توح (صد) مثبت ہوگا اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو اور ح (لا) منفی ہو

تو جبر مقابلہ میں مساوات کی ایک قیمت کم بہ نسبت کر کی ہوگی یا اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور

ح (لا) مثبت ہو اور یہ بات کسی اور طرح سے نہیں ہوگی دفعات ۱۹۸ اور ۱۰۴ کی دیکھو

اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) میں بجای لا کی متواتر + صد صد و صد و دلز۔۔۔ کرو۔ صد کو

رکھتی ہے جو سلسلہ پیدا ہوگا اس میں جتنی تعداد تغیرات ملے گی ہوگی اتنی ہی مساوات ح (لا) =

کی حقیقی قیمتوں کا شمار ہوگا لیکن اگر چہ ح (لا) میں ان قیمتوں کی رکھنی ہے ح (لا) معدوم ہو جائیگا

تو اسی پر دریافت ہوگا کہ مساوات ح (لا) = کی برابر قیمتیں ہوں گی اور تعداد ان کی بیش شمار دریا ہوگی

(۱۰۸) مثلاً اس بات کو تحقیقات کرتی ہیں کہ مساوات لا - ن + ر = کی تمام قیمتوں کی ممکن

ہونی کی لسی کیا بشرط ہوئی چاہئیں

ق کو مثبت مقدار فرض کرو یہاں ح (لا) = لا - ن + ر تو مساوات ح (لا) = کی

قیمتیں $\frac{C}{P}$ ہیں اور فرض کرو کہ صد = $\frac{C}{P}$ اور صد = $\frac{C}{P}$

تو ح (صد) = $\frac{C}{P} - \frac{C}{P} + \frac{C}{P} = \frac{C}{P}$ اور ح (لا) = $\frac{C}{P} - \frac{C}{P} + \frac{C}{P} = \frac{C}{P}$

حد و غائی قیمتوں کی
کی قیمت قیمتوں کی ادنیٰ حد غائی دریافت ہوئی ہے اور اس کو مری غیر کرو تو یہاں قیمت مناسبت کی ہوگی
دفعہ ۴۰ میں ہم نے ایک مثال لکھی ہے کہ سطح ایک مساوات بنتی ہے کہ جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کے
قیمتوں کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہوتی ہیں اور اس مثال پر کیا موقوف ہے ہم علیٰ عموم ایذا کو ہم
بحث کرینگے وارنگ حساب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہے کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سے زیادہ درجہ
کی مساوات میں عمل میں لانی ہی کچھ فائدہ نہیں دیتی اور سی نتیجی صحیح درجہ پیدا ہوتی ہیں کہ اولیٰ
کہوں دشواری غرض یہہ ترکیب عملیات میں تو کسی کام کی نہیں مگر نظریات میں اسے مطالعہ چاہیے
(۱۱۰) مثلاً وارنگ حساب کے ترکیب کے ایسی ہیہ مساوات

$$۳ - ۲ - ۱ = ۱۳ + ۱۱ - ۲ = ۰ \text{ لو}$$

بموجب دفعہ ۴۰ کی وہ مساوات جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کی مجذور ہوں یہہ

$$۳ - ۲ - ۱ = ۱۳ + ۱۱ - ۲ = ۰$$

$$\text{و کی جگہ } \frac{1}{4} \text{ رکھو تو } ۱۳ - ۱۱ + \frac{1}{4} = ۱ - ۰$$

$$\text{یعنی } ۱۳ - ۱۱ + (۱ - \frac{1}{4}) = ۰$$

اب ۹ اعلیٰ حد غائی می کی قیمتوں کی ہیہ مساوات ادنیٰ حد غائی $\frac{1}{4}$ ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کے تفاوت سے کم ہے

ایضاً جب دفعہ ۸۷ کی مساوات مفروضہ کی قیمت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ۱۳ + ۱۱ یعنی ۲۴ ہے اور جب دفعہ ۸۷ کی

مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی تعداداً

$$- (۱ + ۱۳) \text{ ہی ایس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتیں } ۱۵ \text{ اور } ۳ \text{ کے درمیان واقع ہونی ہیں}$$

$$\text{اب } ۱۵ \text{ اور } ۳ - ۱۵ - ۳ = ۰$$

متواتر کہنی سی یہہ دریافت ہوگا کہ ایک قیمت ۱۳ اور ۲ کے درمیان اور ایک قیمت ۲ اور ۱ کے

درمیان اور ایک قیمت ۲ اور ۱ کے درمیان واقع ہوگی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک عوی پر ختم کرتے ہیں اور یہ عوی اوج اصول کی ایک مثال ہی جو ایسی مہنی ثابت کی

مساوات ح (لا) = - میں حسین

$$ح (لا) = ع لا + ع لا - ۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ - لا - ر$$

میں اگر ق کی عددی قیمت تعداد سے بڑا ہو اور قیمت اور ۲ سی چھوٹی ہوگی
تو ایک حقیقی قیمت ۲ سی چھوٹی ہوگی

جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنائے گی اور بدرجہ اولیٰ
مثبت بنائے گی اگر وہ

$$لا - ر - ق (لا + لا - ۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + لا + لا)$$

کو مثبت بنائے گی یعنی اگر وہ لا - ر - ق لا = ۱ - لا کو مثبت بنائے گی

اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور (ا - لا) (لا - ر) - ق لا مثبت ہو

تو ح (لا) بدرجہ اولیٰ مثبت ہوگا اب لا کی جگہ ۲ اور آخر جملہ میں رکھو تو وہ ر (۱ - ۲ - ۴ - ۸ - ۱۶ - ۳۲ - ۶۴ - ۱۲۸ - ۲۵۶ - ۵۱۲ - ۱۰۲۴ - ۲۰۴۸ - ۴۰۹۶ - ۸۱۹۲ - ۱۶۳۸۴ - ۳۲۷۶۸ - ۶۵۵۳۶ - ۱۳۱۰۷۲ - ۲۶۲۱۴۴ - ۵۲۴۲۸۸ - ۱۰۴۸۵۷۶ - ۲۰۹۷۱۵۲ - ۴۱۹۴۳۰۴ - ۸۳۸۸۶۰۸ - ۱۶۷۷۷۲۱۶ - ۳۳۵۵۴۴۳۲ - ۶۷۱۱۱۸۶۴ - ۱۳۴۲۲۳۷۲۸ - ۲۶۸۴۴۷۴۵۶ - ۵۳۶۸۹۴۹۱۲ - ۱۰۷۳۷۸۹۸۲۴ - ۲۱۴۷۵۷۹۶۴۸ - ۴۲۹۵۱۵۹۳۹۶ - ۸۵۹۰۳۱۸۷۹۲ - ۱۷۱۸۰۶۳۵۸۴ - ۳۴۳۶۱۲۷۱۶۸ - ۶۸۷۲۲۵۴۳۳۶ - ۱۳۷۴۴۵۰۸۶۷۲ - ۲۷۴۸۹۰۱۷۳۴۴ - ۵۴۹۷۸۰۳۴۶۸۸ - ۱۰۹۹۵۶۰۶۹۳۷۶ - ۲۱۹۹۱۲۱۳۸۷۵۲ - ۴۳۹۸۲۴۲۷۷۵۰۴ - ۸۷۹۶۴۸۵۵۵۰۰۸ - ۱۷۵۹۲۹۷۱۱۰۰۱۶ - ۳۵۱۸۵۹۴۲۲۰۰۳۲ - ۷۰۳۷۱۸۸۴۴۴۰۰۶۴ - ۱۴۰۷۴۳۷۶۸۸۸۰۱۲۸ - ۲۸۱۴۸۷۵۳۷۷۷۶۰۲۵۶ - ۵۶۲۹۷۵۰۷۵۵۵۲۰۵۱۲ - ۱۱۲۵۹۵۰۱۵۱۱۰۴۰۱۰۲۴ - ۲۲۵۱۹۰۰۳۰۲۲۰۰۸۰۲۰۴۸ - ۴۵۰۳۸۰۰۶۰۴۴۰۰۱۶۰۴۰۹۶ - ۹۰۰۷۶۰۰۱۲۰۸۸۰۰۳۲۰۸۱۹۲ - ۱۸۰۱۵۲۰۰۲۴۱۷۶۰۰۷۶۱۶۳۸۴ - ۳۶۰۳۰۴۰۰۴۸۳۵۲۰۰۱۵۲۳۲۷۶۸ - ۷۲۰۶۰۸۰۰۹۶۷۰۴۰۰۳۰۴۶۵۵۵۳۶ - ۱۴۴۱۲۱۶۰۰۱۹۲۱۴۰۰۷۰۹۳۱۱۱۱۰۴ - ۲۸۸۲۴۳۲۰۰۳۸۴۲۸۰۰۱۴۱۸۲۲۲۲۰۸ - ۵۷۶۴۸۶۴۰۰۷۶۸۵۶۰۰۲۸۳۶۴۴۴۴۰۱۶ - ۱۱۵۲۹۷۲۸۰۰۱۵۳۷۱۲۰۰۵۶۷۲۸۸۸۸۰۳۲ - ۲۳۰۵۹۴۵۶۰۰۳۰۷۴۲۴۰۰۱۱۳۴۵۷۷۷۷۶۰۶۴ - ۴۶۱۱۸۹۱۲۰۰۶۱۴۸۴۸۰۰۲۲۶۹۱۵۵۵۵۵۲۰۱۲۸ - ۹۲۲۳۷۸۲۴۰۰۱۲۲۹۶۸۹۶۰۰۴۵۳۸۳۱۱۱۱۰۴۰ - ۱۸۴۴۷۵۶۴۸۰۰۲۴۵۹۳۷۹۲۰۰۹۰۷۶۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۶۸۹۵۱۲۹۶۰۰۴۹۱۸۷۵۸۴۰۰۱۸۱۵۲۴۴۴۴۰۱۶۰ - ۷۳۷۹۰۲۵۹۲۰۰۹۸۳۷۵۱۶۸۰۰۳۶۳۰۴۸۸۸۸۰۳۲۰ - ۱۴۷۵۸۰۵۱۸۴۰۰۱۹۶۷۵۰۳۳۶۰۰۷۲۶۰۹۷۷۷۷۶۰۶۴ - ۲۹۵۱۶۰۱۰۳۶۸۰۰۳۹۳۵۰۶۷۲۰۰۱۴۵۲۱۵۵۵۵۵۲۰۱۲۸ - ۵۹۰۳۲۰۲۰۷۳۶۸۰۰۷۸۷۰۱۳۴۴۰۰۳۶۰۴۳۱۱۱۱۰۴۰ - ۱۱۸۰۶۴۰۴۰۱۴۷۳۶۸۰۰۱۵۷۴۰۲۶۸۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۳۶۱۲۸۰۸۰۲۹۴۷۳۶۸۰۰۳۱۴۸۰۵۳۷۶۰۰۱۴۴۱۷۲۴۴۴۰۱۶۰ - ۴۷۲۲۵۶۱۶۰۰۵۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۲۹۶۰۱۰۷۵۲۰۰۳۶۰۴۳۱۱۱۱۰۴۰ - ۹۴۴۵۱۲۳۲۰۰۱۱۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۵۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۸۸۹۰۲۴۶۴۰۰۲۳۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۱۸۴۰۰۱۴۴۱۷۲۴۴۴۰۱۶۰ - ۳۷۷۸۰۴۹۲۸۰۰۴۷۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۰۳۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۷۵۵۶۰۹۸۵۶۰۰۹۴۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۰۷۳۶۰۰۱۴۴۱۷۲۴۴۴۰۱۶۰ - ۱۵۱۱۲۱۹۷۱۲۰۰۱۸۸۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۱۴۷۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۰۲۲۴۳۹۴۲۴۰۰۳۷۷۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۲۹۴۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۰۴۴۸۷۸۸۴۸۰۰۷۵۴۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۵۸۸۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۲۰۸۹۷۵۶۹۶۰۰۱۵۰۹۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۱۱۷۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۴۱۷۹۵۱۳۹۲۰۰۳۰۱۸۱۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۲۳۵۵۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۸۳۵۹۰۲۷۸۴۰۰۶۰۳۶۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۴۷۱۰۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۹۶۷۱۸۰۵۵۶۸۰۰۱۲۰۷۲۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۹۴۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۹۳۴۳۶۱۱۳۳۶۰۰۲۴۱۴۴۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۸۶۸۷۲۲۲۷۲۰۰۴۸۲۸۹۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۳۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۷۷۳۷۴۴۴۵۴۴۰۰۹۶۵۷۹۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۷۵۵۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۵۴۷۴۸۹۰۸۸۸۸۰۰۱۹۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۹۵۱۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۰۹۴۹۷۸۱۷۷۷۶۰۰۳۸۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۹۰۲۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۱۸۹۹۵۶۳۵۵۵۲۰۰۷۷۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۸۰۴۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۲۳۷۹۹۲۷۱۱۱۰۴۰۰۱۵۴۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۶۰۸۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۴۷۵۹۸۵۴۲۲۲۰۰۳۰۹۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۹۲۱۶۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۹۵۱۹۷۰۸۴۴۴۴۰۰۶۱۸۱۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۸۴۳۲۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۹۹۰۳۹۴۱۶۸۸۸۸۰۰۱۲۳۶۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۶۸۶۴۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۹۸۰۷۸۸۳۳۷۷۷۶۰۰۲۴۷۲۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۳۳۲۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۹۶۱۵۷۶۶۷۵۵۵۲۰۰۴۹۴۴۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۶۴۴۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۷۹۲۳۱۵۳۳۵۱۱۰۴۰۰۹۸۸۹۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۹۲۸۸۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۵۸۴۶۳۰۶۷۰۲۰۰۱۹۷۷۹۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۸۵۷۶۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۱۶۹۲۶۱۳۴۰۰۳۹۵۵۸۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۷۱۵۲۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۳۳۸۵۲۲۶۸۰۰۷۹۱۱۶۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۹۴۲۲۴۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۲۶۷۷۰۴۵۳۶۰۰۱۵۸۲۳۳۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۸۸۴۴۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۵۳۵۴۰۹۰۷۲۰۰۳۱۶۴۶۷۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۶۸۸۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۰۷۰۸۱۸۱۴۴۰۰۶۳۲۹۳۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۰۱۴۱۶۳۲۸۸۰۰۱۲۶۵۸۶۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۰۲۸۳۲۶۵۷۶۰۰۲۵۳۱۷۳۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۰۵۶۶۵۳۱۵۲۰۰۵۰۶۳۴۶۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۸۱۱۳۳۰۶۳۰۰۱۰۱۲۶۹۳۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۶۲۲۶۱۲۶۰۰۲۰۲۵۳۸۷۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۲۴۵۲۲۵۲۰۰۴۰۵۰۷۷۴۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۴۹۰۴۵۰۴۰۰۸۱۰۱۵۴۸۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۲۹۸۰۸۰۸۰۰۱۶۲۰۳۰۹۷۷۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۵۹۶۱۶۱۶۰۰۳۲۴۰۶۱۹۵۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۱۹۲۳۲۳۲۰۰۶۴۸۱۲۳۹۱۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۰۳۸۴۶۴۶۴۰۰۱۲۹۶۲۴۷۸۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۰۷۶۹۲۹۲۸۰۰۲۵۹۲۴۹۵۶۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۱۵۳۸۵۸۵۶۰۰۵۱۸۴۹۹۱۲۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۸۳۰۷۷۱۷۱۲۰۰۱۰۳۶۹۹۸۲۵۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۶۶۱۵۴۳۴۲۴۰۰۲۰۷۳۹۹۶۵۱۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۳۲۳۰۸۶۸۴۸۰۰۴۱۴۷۹۳۰۲۵۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۶۴۶۱۷۳۶۹۶۰۰۸۲۹۵۸۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۳۲۹۲۳۵۳۹۲۰۰۱۶۵۹۱۷۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۶۵۸۴۷۰۷۷۶۴۰۰۳۳۱۸۳۴۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۳۱۶۹۴۱۵۵۲۸۰۰۶۶۳۶۶۸۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۰۶۳۳۸۳۱۰۷۵۵۶۰۰۱۳۲۷۳۳۷۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۱۲۶۷۶۲۱۵۱۱۲۰۰۲۶۵۴۶۷۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۲۵۳۵۲۴۳۰۲۲۴۰۰۵۳۰۹۳۵۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۸۵۰۷۰۴۸۶۰۴۴۸۰۰۱۰۶۱۸۷۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۷۰۱۴۰۹۷۲۰۸۸۰۰۲۱۲۳۷۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۴۰۲۸۱۹۴۴۰۰۴۲۴۷۴۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۸۰۵۶۳۸۸۸۰۰۸۴۹۴۹۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۳۶۱۱۲۷۷۶۰۰۱۶۹۸۹۹۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۷۲۲۲۵۵۵۲۰۰۳۳۹۷۹۸۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۴۴۴۵۱۱۰۴۰۰۶۷۹۵۹۶۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۰۸۸۹۰۲۲۰۸۰۰۱۳۵۹۱۹۳۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۱۷۷۸۰۴۴۰۰۲۷۱۸۳۹۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۳۵۵۶۰۸۸۰۰۵۴۳۶۷۸۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۸۷۱۱۲۱۷۶۰۰۱۰۸۷۳۵۵۶۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۷۴۲۲۳۵۲۰۰۲۱۷۴۷۱۱۳۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۴۸۴۴۷۰۴۰۰۴۳۴۹۴۲۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۶۹۶۸۹۴۰۸۰۰۸۶۹۸۸۴۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۳۹۳۷۸۸۰۰۱۷۳۹۷۶۸۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۷۸۷۵۷۶۰۰۳۴۷۹۵۳۷۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۵۷۵۱۵۲۰۰۶۹۵۹۰۷۵۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۱۱۵۰۳۰۴۰۰۱۳۹۱۸۱۵۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۲۳۰۰۶۰۸۰۰۲۷۸۳۶۳۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۴۶۰۱۲۱۶۰۰۵۵۶۷۲۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۸۹۲۰۲۴۳۲۰۰۱۱۱۳۴۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۰۲۴۴۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۷۸۴۰۴۸۶۴۰۰۲۲۲۶۹۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۰۴۸۹۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۳۵۶۸۰۹۷۲۸۰۰۴۴۵۳۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۴۰۹۷۹۲۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۷۱۳۶۱۹۴۵۶۰۰۸۹۰۷۶۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۸۰۱۹۵۸۸۴۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۴۲۷۲۳۹۱۲۰۰۱۷۸۱۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۶۰۳۹۱۷۶۸۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۸۵۴۴۷۸۲۴۰۰۳۵۶۳۰۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۳۲۰۷۸۳۷۳۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۵۷۰۸۹۵۶۴۸۰۰۷۱۲۶۰۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۶۴۰۱۵۶۷۵۳۷۶۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۱۱۴۱۷۹۱۲۹۶۰۰۱۴۲۵۲۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۱۲۸۰۳۱۳۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۲۲۸۳۵۸۲۵۹۲۰۰۲۸۵۰۴۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۲۵۶۱۲۲۵۰۰۷۲۰۸۶۲۲۲۲۰۸۰ - ۴۵۶۷۱۶۵۱۸۴۰۰۵۷۰۰۸۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۰۰۵۱۲۲۴۰۰

بابت ششم ۷۳ قیمتیں محدود اور نامتناہی

اور مثال اول رقم کا واحد ہو اسطرح ہم اب اس آخر الذکر مساوات پر بحث کریں گی اور اول ہم بتلائیں گے کہ مساواتیں اوس صورت کی قیمتیں کیسوں ناطقہ نہیں کہیں گی
(۱۱۱) اگر مساوات کی مثال عام اعداد صحیح ہوں اور اوسکی اول رقم کا مثال واحد ہو تو مساوات کی کوئی قیمت کیسوں ناطقہ نہیں ہو سکتی
فرض کرو کہ مساوات

$$a + c + a^2 + c^2 + a^3 + c^3 + \dots + a^n + c^n = 0$$

اور اگر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ قیمت کیسوں ناطقہ مختصر الحدین ہے ہی اور کو لائی جگہ مساوات میں رکھو اور سب کو یکساں ضرب دو تو

$$2a + 2c + 2a^2 + 2c^2 + 2a^3 + 2c^3 + \dots + 2a^n + 2c^n = 0$$

اور یہ سب سے پہلے $a + c + a^2 + c^2 + a^3 + c^3 + \dots + a^n + c^n = 0$ سے $a + c + a^2 + c^2 + a^3 + c^3 + \dots + a^n + c^n = 0$ سے
اباخر نتیجہ ناممکن ہی اسطرح کہ بائیں طرف کا رکن تو صحیح مقدار ہی اور دائیں طرف کا رکن صحیح مقدار ہی
اسو اسطرح مساوات مفروضہ کی قیمت کس نہیں ہو سکتی

(۱۱۲) اسی معلوم ہوا کہ فقط ہم کو تحقیقات اول قیمتوں کی کرنی چاہی جو محدود اور نامتناہی اور صحیح ہوں
اور اب ہم ترکیب مذکور کی دریافت کرنی کی بیان کرتی ہیں اس ترکیب بعض اوقات ترکیب معلوم ہونے کی کہتی ہیں اور بعض اوقات اسکو متعین ترکیب کہتی ہیں

فرض کرو کہ مساوات
$$a + c + a^2 + c^2 + a^3 + c^3 + \dots + a^n + c^n = 0$$

اور اگر ایک صحیح قیمت ہی اس قیمت کی مندرج کرنی سی اور ارقام کو بہ ترتیب معکوس لکھنی سے
یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$c + a + c^2 + a^2 + c^3 + a^3 + \dots + c^n + a^n = 0$$

اسو اسطرح اگر قیمتیں کرتے سے

$$\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n} = 1$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n}$ ایک صحیح عدد ہوا اس کو $ق$ سی تعبیر کرو اور اس کو $ا$ پر تقسیم کرو تو

$$\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n} = 1$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہی اس کو $ق$ سی تعبیر کرو اور اس کو $ا$ پر تقسیم کرو تو

$$\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n} = 1$$

اس نتیجہ پر ثبوت پہنچ گیا کہ $\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n} = 1$

اسی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات $ح (لا) =$ کی ایک قیمت $ا$ کی ہوتی کی واسطی ہمیشہ شرط ضروری ہے کہ

آخر رقم مساوات کی $ا$ پر پوری تقسیم ہوتی ہو اور خارج قسمت ہر جو سطح حاصل ہو اگر $ا$ کا امثال

زیادہ کیا جائے تو حاصل جمع بھی $ا$ پر پوری تقسیم ہو اور اس سطح خارج قسمت حاصل ہو اور $ا$ کا سر جو مساوات میں

زیادہ کریں تو حاصل جمع اس حاصل ہو کہ وہ $ا$ پر پوری تقسیم ہو اور اس سطح عمل کی جائیں جب تک کہ

$ن$ - تقسیم پر ثبوت پہنچے اور خارج قسمت جو حاصل ہو اس پر $ا$ کا سر زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا

اور تقسیم ہو اور خارج قسمت $ا$ ہو

اگر ان تمام مراتب میں سے کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جائے تو جان لینا چاہی کہ صحیح عدد $ا$ قیمت

مساوات کی نہیں ہی

(۱۱۵) ہم نے دفعہ گذشتہ میں ان شرائط کو دریافت کیا ہے کہ جنکی موافق صحیح عدد $ا$ مساوات

$ح (لا) =$ کی ایک قیمت بنتا ہے اب یہ بات اسانی سے دریافت ہوتی ہے کہ اگر ان شرائط

میں سے آخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد $ا$ قیمت مساوات کی ہوگا اس کو $ا$ کہ آخر شرط سطح تعبیر ہوتی ہے کہ

$$\frac{ع_1}{1} + \frac{ع_2}{2} + \frac{ع_3}{3} + \dots + \frac{ع_n}{n} = 1$$

اب اگر یہ صحیح ہوں تو ان میں ضرب دینی مساوات $ح (لا) =$ کی قیمت $ا$ کا ہونا ظاہر ہے

مساوات کی تمام محدود اور ناطق قیمتوں کی دریافت کرنی کی واسطی آخر رقم کے تمام پوری

باشنی والی مقدار میں دریافت کریں اور اس بات کو جانچیں کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۴ کو پورا کرتی

ہیں اس امتحان کی محنت کم ہو جائیگی اگر کم اول نسبت اور منفی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کر لیں
ان حدود غائی کی دریافت کرنی سی اور صحیح پیراز مالش کی ضرورت نہیں ہوگی جو ان حدود غائی
سی مضمون فقط او نہیں اعداد کی از مالش کرنی پڑے گی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہوگی
(۱۱۴) مثیلاً اس مساوات کو لو کہ

$$۵ + ۵ + ۵ + ۵ - ۱۴ = ۲۰ - ۱۱ - ۱۴ = ۰$$

یہاں مجموعہ فتحہ ۱۴ کی ۱ + ۳ + ۳۰ اعلیٰ حدود غائی ہی اور لکی جگہ۔ دیکھو سی یہ مساوات حاصل ہوئی ہے

$$۰ = ۱۴ + (۵ - ۵) + ۱۴ + ۳ + (۵ - ۵) = ۱۴ + ۰$$

اسی ۵ اعلیٰ حدود غائی مثبت قیمتوں کی ہی سی معلوم ہوا کہ تمام مثبت قیمتیں مساوات کی
۱۴ اور ۵ کی درمیان واقع ہوتی ہیں اور ۱۴ کی پوری بائینی والی صحیح ان حدود غائی کی درمیان
جو واقع ہیں اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہیں کہ کونسی او نہیں سی قیمتیں ہیں

۲ -	۱ -	۱ -	۲ -	۲ -
۲ +	۸ +	۱۹ +	۱۹ -	۸ -
۱۹ -	۱۲ -	۲ -	۳۴ -	۲۸ -
۲ +	۹ +	۲ +	۳۴ -	۱۲ -
۱۲ -	۱۰ -	۱۲ -	۵۲ -	۳۰ -
۳ +	۵ +	۱۲ +	۵۲ -	۱۵ -
۲ +	۹ +	۱۳ +	۵۱ -	۱۲ -
۱ -	۳ -	۱۳ -	۵۱ -	۶ -
۲ +	۲ +	۸ -	۲۴ -	۲ -
۱ -	۱ -	۸ +	۲۴ -	۱ -

اول سطر میں وہ پوری بائینی والی آخر رقم کی گہی ہیں جس کا امتحان منظور ہے
اور ہر ایک بائینی والی کی نیچے وہ نتائج لکھی ہیں جو اس کی امتحان پیدا ہوتی ہیں مثلاً پورا بائینی والا ۱۴
آخر رقم ۱۴ کو ۲ پر تقسیم کرتی ہیں اور خارج قیمت ۷ کو اس کی نیچے لکھتی ہیں اب اس کو لاکھ ۲ پر
زیادہ کرتی ہیں اور حاصل جمع ۲۴ کو نیچے لکھتی ہیں اب اس کو ۲ پر تقسیم کرتی سی ۱۲ خارج قیمت نکلتا ہے

اسکو بھی کہتی ہیں اور پیرس لا کا۔ ۱۶ زیادہ کرتی ہیں تو۔ ۲۲ حاصل ہوتی اور پیرس لا پر
تقسیم نہیں ہوتا اسی معلوم ہوگا کہ قیمت نہیں ہے ۱۲ اور ۱۲ اور ۱۲ کی موافق تمام شرائط پوری ہوتی ہیں
اسلی ہی اعداد قیمتیں مساوات کی ہیں اور ۱ اور ۱ اس کے پہلی شرط کو پورا نہیں کرتے
یعنی آخر خارج قیمت۔ انہیں ہی اسو علی پہا اعداد قیمتیں نہیں ہیں

پیرس لا و مفروضہ کو ح (۱۱) = سی تعبیر کریں تو یہ دریافت ہوگا کہ (۱۱-۲) (۲+۱۱) (۱۱+۱۱)
ایک جز ضربی ح (۱۱) کا ہی اور ہی بہہ معلوم ہوگا کہ دوسرا جز ضربی لا + لا + ۱ ہے
(۱۱) اکثر ۱۱ اور ۱ کو پوری باطنی والوں میں نہیں امتحان کرتے کیونکہ اونکا بہہ امتحان
کرنا کہ وہ قیمتیں ہیں یا نہیں اس طرح اس کی کہ اونکو لا کی جگہ مساوات معلوم میں کہہ کر دیکھ لیں
اگر کوئی قوت لا کی مساوات مفروضہ میں سی مفروضہ ہو تو اسکی جگہ اسی قوت کو لکھ لو اور صفر اسکا
سر نہا لو دفعہ ۱۵ دیکھو

جیسا کہ ترکیب خاص اعداد اب وس۔۔۔ محدود اور ناطق قیمتیں مساوات ح (۱۱) =۔

کی چون تو یہ تحقیق کرنا باقی رہا ہی کہ قیمتیں مکرراتی ہیں ح (۱۱) کو حاصل ضرب (۱۱-۱) (۱۱-۲) (۱۱-۳) ...
پرتقسیم کریں اور اس خارج قیمت کو سر (۱۱) سی تعبیر کرنی ہیں اور پیرس لا و اس سر (۱۱) =۔
اس ترکیب کو عمل میں لائیں ہی طریقہ کے مراعت سی مساوات ح (۱۱) = کی مکر قیمتیں
ہو سکتی ہیں اور بہہ معلوم ہو سکتا ہی کہ ہر ایک قیمت مکرر کتنی دفعہ آتی ہے
ح (۱۱) =۔ کی مساوی قیمتوں کی ازمایش باب چہارم سے ہو سکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱ میں جو مساوات لی گئی ہی اسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس مساوات کی جگہ
ایسی مساوات لیں کہ جس میں کوئی سر صحیح ع۔ اول رقم کا ہو تو شرائط تحصیل میں فقط اخراج قیمت
ہیں یہ فرق پٹر لگا کہ۔ اکی جگہ۔ ع حاصل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ

$$۲۱ - ۱۲ + ۱۳ - ۱۵ = ۰$$

یہاں ۱۱ + علی حد غائی مثبت قیمتوں کی مجموعہ دفعہ ۱۱ کی اور مجموعہ دفعہ ۲۱ کی کوئی منفی قیمت نہیں ہے

اور امتحان کرنی سے معلوم ہوتا ہے کہ قیمت نہیں ہے پس اخر رقم کی پوری بائنی مالی ۵ اور ۲ ہیں
تو انکی ترتیب یہ ہوگی کہ

۳	۵
۵ -	۳ -
۸	۱۰
	۲۰
	۱۰ -
	۲ -

پس قیمت ہی اسوے کہ اوسے تمام شرائط پوری ہوتی ہیں آخر خارج قسمت - ۲ ہے
اور ۳ قیمت نہیں کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا

(۱۱۹) اخر رقم کی پوری بائنی والوں کا شمار اصول مفصلہ ذیل کی موافق ہی ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ مساوات ح (۱۱) = کی قیمت ۱ ہو لاکہ جگہ م + ۵ رکھو تو ۱ - م ایک قیمت
کی ایسی ہوگی جو مساوات ح (م + ۵) = کی شرائط کو پورا کر لگی جو رقم ۵ سے

کچھ لگاؤ نہیں رکھتی وہ ح (م) ہی اور تمام اشغال کی صحیح میں اگر ح (۱۱) کی سب اشغال

صحیح ہوں اور م ہی صحیح ہو دفعہ ۲ کو دیکھو پس اگر ۱ صحیح ہو تو ۱ - م ہی صحیح ہوگا اور

اسوے سطح ح (م) کو بموجب دفعہ ۱۱۲ کی تقسیم کر لگا پس کوئی صحیح مقدار

جو اخر رقم ح (۱۱) کو پورا بائنی ہو اور ح (م) کو ۱ - م نہ پورا تقسیم کرنی ہو تو وہ

مقدار خارج از امتحان ہو سکتی ہے

یہاں کوئی صحیح منفی اور مثبت ہو سکتا ہے - ۱۱ اور ۱ قیمتیں اسکی مقرر کرنی سی ح (م)

کے حساب میں بڑی سانی ہو جاتی ہے

دفعہ ۱۱۹ کی مساوات معلوم کو متنبہ کر لو یہاں ۴ اخر رقم کو پورا بائنی ہے لیکن

۱ + ۴ پورا ح (۱ - ۱) کو جو ۹ ہی نہیں تقسیم کرتا ہی سہی یہ قیمت مساوات کی نہیں ہے

اب یہ مثال ۱۱ - ۲۰ + ۱۱۴ + ۱۱۴ + ۲۰۰ = ۰ کی کوئی اس مساوات چکنی ہے

دفعہ ۱۱۹ کی نہیں ہے اور اسکو اس صورت ۱۱ - ۲۰ + ۱۱۴ + ۱۱۴ - ۲۰ = ۰

باب ششم

قیمتیں محدود اور ناطق

ہم دیکھتے ہیں کہ ۲۰ اعلیٰ حد غائی قیمت قیمتوں کی ہی آخر رقم کی قیمت پوری باہمی والے جو ۲۰ سے کم ہوں ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ اور ۱۴ ہیں انہیں سی ۵ و ۸ و ۱۰ قیمتیں نہیں ہیں اسلیٰ کہ

ح (۱) = ۱۲۵۵ اور یہ ۵ - ۸ یا ۱۰ - ۱۰ - ۱ پر پور نہیں تقسیم ہوتا پس آخر رقم کی پور باہمی والی امتحان کے واسطیٰ ۲ و ۴ اور ۱۴ ہیں انہیں ہی معلوم ہوگا کہ ۴ قیمت ہے

(۲۰) ایک مثال قیمت مکسور ناطق کی یہاں ۴ - ۱۱ - ۱۱ + ۴ - ۴ = ۰ سے یعنی
۴ - ۱۱ + ۴ - ۴ = ۰
اول مساوات میں ۴ کے رکھنا کہ مساوات بہت بدل کر ایسی آجائے کہ تمام مثال صحیح ہوں دفعہ ۳۵ کو دیکھو پس

$۰ = ۲۴ - ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۲۴$
یعنی $۰ = ۲۴ - ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۲۴$

بموجب دفعات ۴۰ اور ۴ کے تمام قیمتیں مساوات کی درمیان ۱ + ۱۱ اور ۲۴ (۱ + ۲۴)

واقع ہوں اور ہم امتحان ہی دریافت کرتے ہیں کہ ۱۱ اور ۱ قیمتیں ہیں پس صرف پوری تقسیم کرنی والی
آخر رقم کی ۴ و ۲ و ۳ و ۵ ہیں اور نیز ح (۱) = ۲۰ اور یہ

۴ - ۱۱ - ۲ - ۱ پر پوری نہیں تقسیم ہوتی ہی معلوم ہوا کہ ۴ اور ۲ خارج الامتحان ہیں
اور موافق سابق کی ترتیب عمل کی یہ ہوگی

۴ -	۳ -	۲	۳
۴	۲۲	۱۲ -	۵ -
۵ -		۱	۴
۱۴ -		۱۰ -	۴ -
۴		۵ -	۳ -
۱ -			۱ -

قیمتیں ہیں اور چونکہ ۴ = ۴ تو ۲ اور ۲ قیمتیں صلی مساوات کی حاصل ہوئیں

نوان باب تنزل معادلات

اس باب میں ہم اس بات کی تحقیقات کریں گے کہ کس طرح سی ایسا یا کا حل اسی کم درجہ کی مساوی کے
 حل پر بعض صورتوں میں موقوف ہو سکتا ہے جبکہ اوپری قیمتوں کی ارتباط معلوم ہوں جس عمل سے
 یہ امر دریافت ہوتا ہے اس کو تنزل معادلات کہتے ہیں
 (۱۲۲) جب دو مساواتوں میں ایک قیمت یا کئی قیمتیں مشترک ہوں تو اس قیمت یا قیمتوں کو دفعتاً
 فرض کرو کہ $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ مساواتوں میں جبکہ ایک قیمت مشترک ہے
 پس $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ میں $\lambda = 1$ ایک جزو ضربی مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ $(\lambda) = 10$ اور
 $(\lambda) = 1$ کی دفع مشترک عظم $\lambda = 1$ ایک جزو ضربی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس ہر ایک جزو ضربی مشترک
 $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ کا دفع مشترک عظم کا ہی جزو ضربی ہوگا اور کوئی اور جزو ضربی اس فن عظم میں نہیں واقع ہوگا
 پس اسی معلوم ہوا کہ اگر ہم $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ کا دفع مشترک عظم دریا کریں اور اس کو برابر صفر کے
 لکھ دیں تو اس مساوات کی قیمتیں مطابقت نامہ معادلات $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ کے
 مشترک قیمتوں سے رکھنے

اگر $(\lambda) = 10$ اور $(\lambda) = 1$ میں کوئی جزو ضربی مکرر آتا ہے تو دفع عظم میں یہی مکرر لگا
 (۱۲۳) مثلاً فرض کرو کہ یہ دو مساواتیں ہیں

$$\lambda^2 + 3\lambda - 5 - \lambda^4 - \lambda - 8 = 0$$

$$\text{اور } \lambda^2 + \lambda - 4 + \lambda^4 - \lambda - 10 = 0$$

ایان مساواتوں کی دائیں طرف کی اراکان کا دفع عظم $\lambda^2 + \lambda - 4 - 8 = 0$ ہی اور اگر اس کو
 برابر صفر کے لکھیں تو $\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$ اور $\lambda^2 + \lambda - 10 = 0$ کی حاصل ہوگا

پس دونو مساواتوں کی مشترک قیمتیں ۱۲ اور ۴ ہیں
 (۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات $(\lambda) = 10$ کی دو قیمتیں ۱ اور ۱ ہیں جبکہ ربط باہمی ہم کو یہ معلوم ہے کہ
 $\lambda + 1 = 10$ یا $\lambda = 9$ یا $\lambda = 1$ مطلوب یہ ہے کہ ان قیمتوں کو دریافت کریں

جو کہ مساوات ح (لا) = کی اور باقیمتین میں لوح (ا) = اور ح (ب) = -
لیکن ب = رسیع ل سیو ح (رسیع ل) =

پس معادلات ح (لا) = - اور ح (رسیع ل) = کی مشترک قیمت ۱ ہے
تو وہ بموجب فغہ گذشتہ کی دریافت ہو سکتی ہی پس اس طرح تو دریافت ہو گیا اور اس ارتباط
ع ل + ق ب = رسی ب دریافت ہو جائیگا اسی معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب اجزا ضربی
لا - ۱ اور لا - ب پر ح (لا) پورا تقسیم ہو جائیگا اور خارج قیمت کو برابر صفر کی لکھیں تو ایک
مساوات ایسی حاصل ہو جائیگی کہ اسی باقی قیمتیں مساوات ح (لا) = کی دریافت ہو جائیگی
(۱۲۵) تمثیلاً فرض کرو کہ یہ مساوات ہو

$$(۱) \quad ۴ - لا - لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ = ۱۰$$

اور یہ ہم کو معلوم ہے کہ اس کی دو قیمتیں ۱ اور ب میں ارتباط باہمی یہ ہے کہ ب = ۱ + ۱۲
مساوات (۱) میں لا کی جگہ ۱ + ۱۲ رکھو تو

$$۴ - (۱ + ۱۲) - (۱ + ۱۲)^۲ + (۱ + ۱۲)^۳ + (۱ + ۱۲)^۴ - (۱ + ۱۲)^۵ + (۱ + ۱۲)^۶ = ۱۰$$

$$\text{یعنی } ۱۴ - لا^۲ - ۲۴ لا - لا^۴ + ۱۴ لا^۳ - ۸ = ۰$$

$$(۲) \quad ۴ - لا - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ = ۲$$

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائیں طرف کی ارکان کا فرق عظم ۲ - ۲ ہے پس ۱ = ۲
اور سیو ح ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتیں ۱۲ اور ۵ ہیں تو یہی قیمتیں ہوں گی

$$لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱۰ = (۲ - لا) (۵ - لا) (لا + ۱)$$

پس اور قیمتیں $\frac{1}{2} (۱ - لا)$ ہیں

(۱۲۶) یہ ہو سکتا ہے کہ ایک اور زوج قیمتوں کا سنہ اور صہ میں یہاں ارتباط ہو کر ع + ق صہ = ر

تو اس صورت میں چلی ج (لا) اور ح (رسیع ل) کی فرق عظم میں لا کی دو درجہ کا جمع ہو جائیگا

اجزا ضربی لا - ۱ اور لا - صہ ملے ہوں گی اگر قیمتیں ۱ اور ب دونوں مساوات ح (لا) = -

مین کر آئین توج (لا) اور ح (ر-س لا) وفق اعظم میں جز فی لا-۱ کمر ایگ
 (۱۲۷) علی لہوم بیم فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = کی دو قیمتیں ۱ اور ب میں باہمی ارتباط یہی کہ
 ب = سر (۱) تو معادلات ح (لا) = ۱۰ اور ح (سر لا) = ۰ کی ایک قیمت مشترک ۱ ہوگی
 اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کر سکتی ہیں
 (۱۲۸) ایک صورت ایسی بھی ہے کہ او سمن دفعہ ۱۱۲ اور ۱۲۴ کی کچھ امداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی پڑے گی
 مثلاً مساوات ح (لا) = ۰ ہو اور بیم کو معلوم ہے کہ اس کی قیمتوں کی زوج واقع ہوتے ہیں
 اور ہر ایک زوج ۱ اور ب قیمتوں کا اس ارتباط ۱ + ب = ۲ کی شرائط کو پورا کرتا ہے
 تو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے ہم معادلات ح (لا) = ۰ اور ح (۲-لا) = ۰ کی مشترک
 قیمتیں دریافت کرینگے مگر ان قیمتوں میں بالکل مطابق ہوگا اس واسطی کہ بموجب فرض کے
 ح (۱) = ۰ یعنی ح (۲-ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۱-۲) = ۰
 پس قیمتیں ۱ اور ۲ دونوں مشترک دونوں مساواتوں میں ہیں اور علیٰ ہذا القیاس اوزار اور قیمتوں کے
 مشترک دونوں مساواتوں میں ہیں اس واسطی کہ دونوں مساواتوں میں تطبیق نامہ ہوگی
 (۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا میں بحث ہوئی ہے اس کی تشریح کی بہت طریقہ ہیں مگر ہم ان میں سے
 دو لکھتی ہیں تاکہ طالب علموں کو اس بات کی مضمون میں متیق ہو جائے
 اول ہم عمل اس طرح کرتی ہیں کہ فرض ۱-ب = ۲ ی تو ہم کو ایک سادہ ہی مساوات میں حاصل ہوگی
 ح (۱) = ۰ ۱ + ب = ۲ ۲-ب = ۲ ی
 ان مساواتوں میں سی دوسری سیر سی مساوات سی ۱ = ی + راس قیمت کو مساوات اول میں رکھو
 توج (ی + ر) = ۰ مساوات سی قیمتیں ی کی دریافت ہو سکتی ہیں اور پھر ان قیمتوں کی مطابق
 ۱ اور ب کی قیمتیں بھی دریافت ہو جائیں گی اب یہ بات اسان ہی کہ مساوات ح (ی + ر) = ۰ میں ہم بیم
 ثابت کر دیں کہ او سمن ی کی حقت قوا میں ہیں اگر ہم ی کو مقدار مجہول خیال کریں تو مساوات
 کا درجہ مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

ح (ا) = ح (ب) = ح (س) = ۰ پس
 ح (ا) = ح (ب) = ح (ص) = ح (ع - ا - ن - پ) = ۰
 ابنا خرد و مساواتوں سے ب کو دور کرو تو ایک ہی مساوات ہم کو حاصل ہوگی کہ سر (ا) = ۰
 پس مساوات ح (لا) = ۰ اور سر (لا) = ۰ کی ایک مشترک قیمت ہے اور یہ بموجب
 دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہو سکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سے متعلق چند مثالیں اب ہم لکھتی ہیں

(۱) اس مساوات

$$لا + ع + لا - ا + ع + لا - ۲ + ... + ع + ن = ۰$$

کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور ان کو دریافت کرو
 ان قیمتوں کو ا + ب + ۱ + ۲ + ۳ + ... سے تغیر کرو
 تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے

$$\begin{aligned} ع - ۱ &= ۱ + (۱ + ب) + (۱ + ۲ + ب) + ... + (۱ + ن - ۱ + ب) \\ ع - ۲ &= ۱ + (۱ + ب) + (۱ + ۲ + ب) + ... + (۱ + ن - ۲ + ب) + (۱ + ن - ۱ + ب) \\ \text{یعنی } ع - ۱ &= ۱ + ۱ + \frac{ن(ن-۱)}{۲} + ب \\ ع - ۲ &= ۱ + ۱ + (ن-۱) + ۱ + ب + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۶} \end{aligned}$$

میسواں باب الجبر کا دیکھو
 اول حاصل کے مجذور میں ہی دوسرے حاصل کے ن گنی کو تفریق کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$(ن-۱) ع - ۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن = \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

پس ب اسی دریافت ہو گیا اور ب کی معلوم ہونی سے معلوم ہو جائیگا
 (۲) مساوات لا + ۳ لا - ۱۲ لا - ۸ لا - ۴ ن = ۰ کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں
 اور ان کی علامتیں مختلف ہیں اور ان کو دریافت کرو یہاں اگر لاکہ علامت بدل دیں تو مساوات

ایسی حاصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونوں میں ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

$$۰ = ۴۲ - ۱۱۸ + ۱۱۲ - ۱۱۲$$

کی ایک قیمت مشترک ہی پس موجبہ فتحہ ۱۲۲ کی ان دونوں مساواتوں کے بائیں طرف کی ارکان کا وقع اعظم دریافت کریں یا دونوں مساواتوں کو تفریق کر لیں تو

$$۰ = ۱۱۴ - ۱۱۲$$

$$۱۴ = ۱۱۲ - ۱۱۲$$

پہلی سی کوئی قیمت نہیں حاصل ہوتی اور دوسری سی ۱۱۲ حاصل ہوتا ہے اور ۱۱۲ اور ۱۱۲ مساوات مفروضہ کی قیمتیں ہیں

(۳) مساوات ۳۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ = ۰ کی دو قیمتیں ہیں جسکا حاصل ضرب ۲ ہی اونکو دریا کرو فرض کرو کہ ایک قیمت ہی تو ۲ دوسری قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

$$(۱) ۰ = ۴ + ۱۹ - ۲۳ + ۱۹ - ۲۳$$

$$\text{اور } ۳ = ۴ + \left(\frac{۲}{۳}\right) ۱۹ - \left(\frac{۲}{۳}\right) ۴ + \left(\frac{۲}{۳}\right) ۱۹ - \left(\frac{۲}{۳}\right) ۴$$

$$\text{یعنی } ۴ = ۲۸ + ۱۵۲ - ۲۳۳۴ + ۳۳۳۸ - ۲۳۳۴$$

$$\text{یا } ۳ = ۲۲ + ۱۴ - ۲۱۸ + ۳۱۴ - ۲۱۸$$

معادلات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کی ارکان کا وقع مشترک ۳۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ اسکو برابر صفر کے لکھ کر ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ ۱۱۲ = ۱۱۲ پس ۱۱۲ اور ۱۱۲ مطلوب قیمتیں ہیں

دسواں باب معادلات متکافیہ

(۱۳۲) مساوات متکافیہ اسی کہتی ہیں کہ اگر مقدار بھول بدلی کر متکافی اپنا ہو جائے تو یہی وہ مساوات نہ بدلی ہی معلوم ہوا کہ اگر قیمت ایسی مساوات کی ہو تو ارکان متکافی یعنی ۱۱۲ ہی اور مساوات کی قیمت ہو اب ہم لکھینگے کہ مساوات متکافیہ کا حل موقوف

مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہوں مگر اوسکی ساتھ یہ بھی شرط ہے کہ اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافئہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا - اہونا بادی النظر میں
ظاہر معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری توج (لا) پورا لا + ابتر تقسیم ہوگا
دفعہ ۴ کو دیکھو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قیمت ہو تو سر (لا) = مساوات متکافئہ جفت درجہ
کی ہوگی اور اوسکی آخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافئہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا + اہونا بادی النظر میں
ظاہر معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا - ابتر
تقسیم ہوگا دفعہ ۴ دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قیمت لکھتا ہے تو سر (لا) = مساوات متکافئہ
جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی آخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافئہ جفت درجہ کی ایک قیمت کا + اور دوسرے قیمت - اہوگی
یہ امر ظاہر بادی النظر میں معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری

توج (لا) پورا لا - ۲ - ابتر تقسیم ہوگا دفعہ ۳ کو دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قیمت
لکھتا ہے تو سر (لا) = مساوات متکافئہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی آخر رقم مثبت ہوگی
(۱۳۵) خاص قیمتوں کی باب میں جو کچھ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہے مگر اوسکا اثبات بھی آسان ہے

آخر صورت میں دوسری نوع کی جو مساوات متکافئہ جفت درجہ کی بیان ہوئی اسو خیال کرو
فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات کو تعبیر کرتا ہے اب ہم کو یہ معلوم ہے کہ ح (لا) ایسا

کہ ح (لا) = - لا ح (۱) اور یہ بھی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا
لا - ابتر تقسیم ہوتا ہے اب ہم کو ثابت کرنا یہ ہے کہ خارج قیمت ایسا جملہ ہے کہ اول اور آخری

ارقام متبادی الابعاد کے امثال برابر ہوں
ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لا ح (۱)

گیارہواں باب معادلات ثنائی یا دور محلی

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت $\lambda = 1$ ہو اور اوپر مین λ مقدار معلوم ہو تو اسکو معادلات ثنائی یا دور محلی کہتے ہیں۔

اس مساوات کی قیمتیں سب مختلف ہوتی ہیں کیونکہ $\lambda = 1$ کا اول جلد مشتق $\lambda = 1$ ہے

اور کوئی قیمت ایسی لاکھ نہیں ہو سکتی کہ $\lambda = 1$ اور $\lambda = 1$ کو محدود کری دفعہ ۵ دیکھو

(۱۴۲) اگر $\lambda = 1$ ہو تو $\lambda = 1$ یعنی برابر کی ن مرتبہ کی نزول کے ہی ایک مساوات

$\lambda = 1$ کی قیمتیں بموجب دفعہ ۳۳ کی ہیں اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہیں

اسی بہ ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ایک مقدار جبرہ کی ن مرتبہ کی نزول ن طرح کی ہوتی ہیں

مقدار جبرہ سی مراد ہی چار حقیقی مقدار سی یا مقدار تخیلی سی جو $+ ق - ۱$ کی صورت ہوتی ہیں

(۱۴۳) فرض کرو کہ مقدار کی ن مرتبہ کی نزول میں سی ایک کو تعبیر کرنا ہی تو $\lambda = 1$ پس مساوات

$\lambda = 1$ مین $\lambda = 1$ کے فرض کرو تو $\lambda = 1$ مین $\lambda = 1$ ہو گا

اسی معلوم ہوا کہ $\lambda = 1$ یعنی برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور

$\lambda = 1$ مین $\lambda = 1$ لیکن $\lambda = 1$ اسو اسطی $\lambda = 1$ پس

پس کسی مقدار جبرہ کی ن مرتبہ کی نزول اسطرح دریافت ہو سکتی ہیں کہ اوپر مین سی ایک کو

واحد کے ن نزولوں مین متواتر ضرب دین

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ایک حقیقی مثبت مقدار سی اور ہم کو مساوات $\lambda = 1$ ہے

اور مساوات $\lambda = 1$ کے حل کرنی ہیں اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت λ کے

ن وین نزول کے ہی جو ہمیشہ ضابطہ ثنائی کی استقامت سی نکل سکتی ہی خواہ حقیقی یا تقریباً

جبر مقابلہ کا جو میسواں باب $\lambda = 1$ کی فرض کرو تو مساوات مین مقروضہ کی یہ صورت ہوگی

کہ $\lambda = 1$ اور $\lambda = 1$ اور یہ مساوات مین علم مثلثی جملوں کے استقامت سے

حل ہو سکتی ہیں میسواں باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتوں کو تعبیر مین علم مثلثی جملوں کے استقامت سے

اور اگرچہ ہم انکو جبر مقابلہ سی علی العموم نہیں حل کر سکتے ہیں مگر یہی افکی باب مین تلیج مستطیل کہتے ہیں

(۱۷۵) اگر مساوات $۱-۰$ کی قیمت سہ ہو تو سہ ہی اس کی قیمت ہوگی جس میں صحیح قیمت یا منطقی ہے

اس واسطی کہ $(س) = (س) = (س) = ۱ = ۱$

(۱۷۶) اگر مساوات $۱+۰$ کی سہ ایک قیمت ہو تو سہ ہی ایک قیمت ہوگی جس میں مطلق صحیح قیمت یا منطقی ہے

اس واسطی کہ $(س) = (س) = (س) = ۱ = ۱$ اگر مطلق ہو

(۱۷۷) اگر م اور ن متباہین ہوں تو مصادرات $۱-۱=۱-۱$ اور $۱-۱=۱-۱$ کی کوئی مشترک

قیمت سوا واحد کے نہیں ہو سکتی

فرض کہ ع اور ق دو صحیح ایسی ہوں کہ جس میں ہم ارتباط ہو کہ ع م - ق ن = ۱ ایسے

صحیح ہمیشہ جبر مقابله کی استعانت سے دریافت ہو سکتی ہیں چو الیسا ن باب جبر مقابله کا دیکھو

اور فرض دو نوسا و اتون کی مشترک قیمت ط ہی پس $ط = ۱$ اس واسطی

$ط = ۱$ اور $ط = ۱$ اس واسطی $ط = ۱$ اسی معلوم ہوا کہ $ط = ۱$ یعنی $ط = ۱$

(۱۷۸) اگر ن عدد اولی ہوا اور مساوات $۱-۰$ کی کوئی سی قیمت سہ ہو مگر واحد نہ ہو

تو تمام قیمتیں مساوات کی اس سلسلہ سہ و سہ و سہ سے حاصل ہوں گیں

اس واسطی کہ بموجب دفعہ ۱۷۵ کے یہ مقدار تمام قیمتیں مساوات کی ہیں اس واسطی اب ہم کو صرف یہ بتانا ہے

باقی رہا کہ ان میں سے کوئی سی دو برابر نہیں ہیں اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ سہ = سہ پس

سہ = سہ = الیس اسی ثابت ہوا کہ $۱-۱=۱-۱$ اور $۱-۱=۱-۱$ قیمت مشترک

سوا واحد کی رکھتی ہیں اور یہ بموجب دفعہ ۱۷۷ کی ناممکن ہے اور چونکہ ر - ص کم قیمت ن کے ہے

اس واسطی وہ متباہین ہیں

(۱۷۹) اگر ن عدد اولی نہ ہوا اور سہ کوئی سی قیمت مساوات $۱-۰$ ہو تو

بموجب ۱۷۵ کے یہ تو درست ہی کہ کوئی قوت سہ کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہ

نہیں ہے کہ متواتر قوا سہ سی قیمتیں مساوات کی ہاتھ لگ جائیں مثلاً فرض کرو کہ ن = ع اور

مساوات $۱-۰$ کی قیمت سہ ہی تو مساوات $۱-۰$ کی ہی قیمت سہ ہے

اور علیٰ ہذا القیاس اور قواسمہ کی کیفیت ہی لیکن یہ کہ قوتوں کے لینے سے مختلف قیمتوں کا پڑا
قیمتیں نہیں کی سکتی اسکا کمرہ $۱۶ = ۴ \times ۳ = ۲ + ۳ = ۳ \times ۲ = ۳$ سے تمام قیمتیں نہیں
اور علیٰ ہذا القیاس پس مساوات ۱ - ۰ کی قواسمہ سے تمام قیمتیں نہیں
ماہر لک سکھتین

اگر ن عدد اولی نہ ہو تو یہی ہم درست ہی کہ بعض قیمتیں ذات ل - ۱ = کی ایسی صحت کہیں
کہ انکی متواتر قیمتوں سے تمام قیمتیں اتنے لگ جائیں علم مثلثی جہلی اگر قیمتوں کی جگہ ہر قیمت
اسانی سے ثابت ہو سکتی ہے

(۱۵۰) مساوات ۱-۱ = میں اگر مختلف اعداد متبائنہ کا حاصل ضرب ہو تو اس کا حل ہو قوت اول مساواتوں پہ ہو گا جسکی صورت متشابه مساوات کی ہو اور انہیں لاکھ قوت ناما کے اجزاء ضربی اوئے ہوں

تمثیلاً فرض کرو کہ حاصل ضرب جزا ضربی اولیٰ م موع وق کا ہو اور قیمت ساوا لا۔ ا۔ کی اور
 لا۔ ا۔ کی قیمت مساوات لا۔ ا۔ کی قیمت لرو اور یہ قیمتیں مختلف واحد سے فرض کی جائیں
 اول مساوات لا۔ ا۔ کی قیمتیں اس حاصل ضرب کی قیمتیں ہوں گیں

$$(1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1})(1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1}) \dots (1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1})$$

اسوے کہ فرض کرو کہ صدہ گرا ایسے رقم کو تعمیر کریں تو (سہ صدہ لکھ) =

[illegible]

بائیں طرف کی مقدار قیمت مساوات $\frac{1}{2} = 1$ کی ہی لیکن م اور ع ق متباین ہیں تو یہی ناممکن ہے کہ ان مساواتوں کی قیمت مشترک ہو والا واحد ہم قیمت مستثنیٰ ہے اگر ن میں اجزاء ضربی متباین تین سی زیادہ ہوں تو یہی اسی طرح عمل ہوگا

کی مشترک قیمت سوا و احاد کے نہیں ہو سکتی

(۱۵۳) عملاً دفعہ بالا کی قیمت نہیں رکھتی اسلیٰ کہ جو عملاً اوسمین کرنے پڑتے ہیں

وہ علیٰ العموم نہیں ہو سکتی فرض کرو کہ مساوات لا۔۱ = کو حل کر سکتے ہیں اور سہ کو

دریافت کرتی ہیں تو تمام مقادیر اوسہ و سہ۔۰۰۰۔۱ قیمتیں مساوات

لا۔۱ = کی تو اس طرح ہم کو قیمتیں دریافت ہو جائینگے لیکن سہ کے دریافت کرنی کی واسطے

ہم مساوات لا۔۱ = کو حل کریں یعنی ملا سہ کو دریافت کریں اسمین سہ = ملا

اور اس دریافت کرنے کے واسطے کوئی ترکیب جبر مقابلہ میں نہیں ہے

مثلاً مساواتیں لا۔۱ = ۱ اور لا۔۱ = کو اگر ہم حل کر لیں تو مساوات لا۔۱ = ۰

کی بھی تمام حل موجب دفعہ ۱۵۰ کی حاصل ہو جائینگے مگر ہم مساوات لا۔۱ = ۰ یا لا۔۱ = ۰

کو موجب دفعہ ۱۵۲ کے نہیں حل کر سکتی ہم کو صرف تین قیمتیں مساوات اول کی اور پانچ قیمتیں

مساوات دوم کی حاصل ہونگیں

(۱۵۴) معادلات لا۔۱ = ۰ اور لا۔۱ = ۱ کی علیٰ حل کرنی کی ترکیب ہم لکھتی ہیں سہمین

ن بہت بڑا نہیں ہے، اگر ن کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان مساواتوں کے حل مکرر جذر نکالنی سے ہوتا ہے لیکن

اور ہم ثنائی کی بار بار جذر نکالنی کی ترکیب جبر مقابلہ میں لکھتی دفعہ ۲۸ کو دیکھو

پس اس صورت میں تمام قیمتیں معلوم ہو جائیں گی اگر ن = ع م

اسمین ع = ۲ تو لا۔۱ = کے فرض کرو تو مساواتیں لا۔۱ = ۰ اور لا۔۱ = ۱

کی یہ ہو جائیں گی کہ لا۔۱ = ۰ اور لا۔۱ = ۱ پس اگر معلوم ہو جائے تو لا۔۱ = ۰

کہ ہم دفعہ مکرر جذر نکالیں

(۱۵۵) مساوات لا۔۱ = ۰ میں فرض کرو کہ ن طاق عدد ہی یعنی ن = ۲م + ۱ مساوات

لا۔۱ = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی ۱ + اسلئے کہ اوسکی کو کسی منفی قیمت نہیں ہے

اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سوا واحد کی قرار دیں تو لا۔۱ = ۱ کی بھی واحد کی

برابر نہیں ہوگا پس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہے $1 + 2^m - 1$ کو $1 - 2^m$ پر تقسیم کرنا چاہیے کہ
تو مساوات مختصر اور تحویل ہو کر یہ پیدا ہوگی جسکو حل کرنا چاہیے کہ
$$1 + 2^m - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} + 2^m - 1$$

یہ مساوات متکافضہ ہی اور اسکا حل m درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے
(۱۵۶) مساوات $1 - 2^m = 0$ فرض کرو کہ n جفت ہی اور $n = 2^m$ تو مساوات کے
حقیقی قیمتیں صرف دو $1 + 1$ اور $1 - 1$ میں اور $1 + 1$ اور $1 - 1$ کے حاصل ضرب $1 - 1$
پر تقسیم کرتے ہیں پس جو مساوات حل کرنی پڑیگی وہ یہ مختصر اور تحویل ہو کر حاصل ہوگی
$$1 + 2^m - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} + 2^m - 1$$

یہ مساوات متکافضہ ہی اور اسکا حل $m - 1$ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے
مساوات $1 + 2^m = 0$ کو $(1 - 2^m)(1 + 2^m) = 0$ کی صورت میں لکھ کر ہم عمل سانی ہی کر سکتے ہیں
اور پہلے $1 + 2^m = 0$ اور $1 - 2^m = 0$ میں کر لیں یا اس ترکیب کو
عمل میں لائیں جو دفعہ ۵۴ میں بیان ہوئی

(۱۵۷) مساوات $1 + 2^m = 0$ میں فرض کرو کہ n طاق ہی اور $n = 2^m + 1$ اور مساوات
 $1 + 2^m + 1 = 0$ کی طرف ایک حقیقی قیمت یعنی $1 + 2^m + 1 = 0$ اور $1 + 2^m + 1 = 0$ کو
 $1 + 2^m + 1 = 0$ پر تقسیم کریں تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہ پیدا ہوگی کہ
$$1 + 2^m + 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} + 2^m + 1$$

یہ مساوات متکافضہ ہی اور اسکا حل m درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے
اگر n طاق مساوات $1 + 2^m = 0$ میں ہو اور ہم $1 + 2^m = 0$ لاسی تبدیل کریں تو مساوات
 $1 - 1 = 0$ حاصل ہوگی اگر ہم چاہیں تو اس دوسرے مساوات کو حل کریں اور قیمتیں نکالیں
علامتیں بدل دیں تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا
(۱۵۸) اگر مساوات $1 + 2^m = 0$ میں n جفت فرض کریں تو مساوات کی کوئی حقیقی

قیمت نہیں ہوگی یہ مساوات مساوات متکافضہ ہی اور اس کا حل اس مساوات کی حل ہوتو ہوتا ہے
جس کا درجہ نصف صلی مساوات کی درجہ سی ہی یا مساوات کی حل کرنی میں دفعہ ۱۵۴ کی ترکیب کا مین لاؤ

(۱۵۹) پس چار دفعات گذشتہ سی یہ بات ثابت ہوتی ہی کہ معادلات مفروضہ کا حل
ایسی معادلات کی حل پر موقوف ہو سکتا ہی جس کا درجہ نصف معادلات مفروضہ کی درجہ سی ہو
ہر ایک صورت میں حقیقی قیمتوں کی موافق جو اجزاء ضربی ہوتی ہیں اور کم دور کرتی ہیں اور لا + ۱ = سی
لکھتی ہیں اور ایک مساوات سی کی حاصل ہوتی ہی اب یہ مساوات سی کی تمام حقیقی قیمتیں ہو سکتی ہیں
اس واسطی کہ فرض کرو کہ $سہ + صد = ۱$ ایک تخیلی قیمتوں میں سی لاگی ہو تو اسکی مطابقت ہی کی قیمت یہ ہوگی کہ
 $سہ + صد = ۱$ یعنی $سہ + صد = ۱$ اور $۱ = سہ + صد$ اب یہ ہم ثابت کرینگے کہ
اور یہ برابر ایک حقیقی مقدار ہی نہیں ہو سکتا بلکہ یہ ثابت ہو کہ $سہ + صد = ۱$ اب یہ ہم ثابت کرینگے کہ
 $سہ + صد$ برابر اسکے ہے

چونکہ $سہ + صد = ۱$ ایک قیمت مساوات لا + ۱ = سی کی ہی تو بموجب دفعہ ۱۵۴ کے
سہ - صد = ۱ یہی قیمت مساوات کی ہوگی پس

$$(سہ + صد = ۱) \text{ اور } (سہ - صد = ۱) \Rightarrow ۱ = ۱$$

اب ضرب دینی (سہ + صد) = ۱ اس واسطی $سہ + صد = ۱$ = ۱

اور $سہ + صد$ مثبت ہی اسلی $سہ + صد$ برابر اسکے ہوا

(۱۶۰) اب ہم بعض مثالیں معادلات

$$لا + ۱ = ۱۰ \text{ اور } لا - ۱ = ۱۰ \text{ کی لکھتے ہیں}$$

$$(۱) لا - ۱ = ۱۰ \text{ اسی معلوم ہوتا ہے کہ } (لا - ۱) (لا + ۱ + ۱) = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ قیمتیں اور $۱ - ۱ = ۱$ ہی پس یہ قیمتیں + ا کی

تین جزو الکعب ہیں اور اسکی علامتیں بدلتی سی ہم کو تین جزو الکعب - اسکے حاصل ہوتی ہیں
یا اسکوں بیان کرو کہ مساوات لا + ۱ = ۱ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۲) $لا + ۱ = ۰$ میں $لا + \frac{۱}{۱۱} = ۰$ ی کے رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ $۲ - ۰ = ۰$

پس $۲ = ۰$

اسی طرح $لا + ۱ = ۰$ (۱) $لا + ۲ = ۰$ (۲) $لا + ۳ = ۰$ (۳)

ان دوم درجوں کی مساواتوں کی قیمتوں کی دریافت کرنی سی حل کامل ہو جائیگا

(۳) $۱ - ۰ = ۰$ اسی حاصل ہوتا ہے کہ $(لا - ۱) (لا + ۲ + لا + ۳ + لا + ۴) = ۰$

اسی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات $لا + \frac{۱}{۱۱} + لا + \frac{۱}{۱۱} + لا + \frac{۱}{۱۱} = ۰$ یعنی

ی + می - ۱ = ۰ کی حل ہونی چاہی پس $۰ = ۱ - \frac{۱}{۱۱}$

اسی طرح $لا - ۱ = ۰$ (۱) $لا + لا - ۱ = ۰$ (۲) $لا + لا + لا - ۱ = ۰$ (۳)

ان دوم درجہ کی مساواتوں کے حل کرنی کل حل ہو جائیگا اور قیمتوں کی علامتیں بدل میں

تو وہ مساوات $لا + ۱ = ۰$ کی قیمتیں بن جائیں گی

(۱۴۱) اگر ہم مساوات $لا - ۱ = ۰$ کی حل کرنی میں کوشش کریں تو ہم کو مساوات ی کی تیسری

درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات $لا - ۱ = ۰$ کے حل کرنے میں سعی کریں تو ی کی چوتھی

درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اب اگر دو بالوں میں بتلائیے کہ تیسری اور چوتھی درجہ

کی مساواتیں کس طرح حل ہوتی ہیں یہ بات معلوم ہو جائیگی کہ حل کی ترکیبیں عملاً کسی کام کی نہیں

ہوتیں جبکہ معادلات جنگو حل کرتی ہیں تمام حقیقی قیمتیں رکھتی ہوں جیسی کہ یہاں صورت ہی

جس پر بحث موافق دفعہ ۱۵۴ کے ہم کرتے ہیں

(۱۴۲) اگر مساوات $لا + لا + لا + ق = ۰$ کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دوم

موافق حل کر کے $لا$ کی قیمتیں دریافت کرتی ہیں اور یہ موافق اس باب کی ترکیبوں کے

$لا$ کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں

اب بیان ہم ایک دعویٰ دو مقدار صم کی حاصل ضرب کے باب میں ثابت کر کے اس بات کو ختم کرتی ہیں۔

(۱۴۳) فرض کرو کہ $لا$ اور $ب$ دو مقدار حیرتہ ہوں اور $ص$ صحاح مثبتہ ہوں تو ہم

کی مختلف قیمتیں ہونگیں اور کتاب کی مختلف قیمتیں موافق دفعہ ۱۴۲ کے ہونگیں
 اسی معلوم ہوا کہ کتاب اور کتاب کی اصل ضرب کی ان مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں
 اور اب ہم یہ ثابت کریں گی کہ اوسکی اتنی قیمتیں نہیں ہو سکتیں بشرطیکہ م اور ن متباہن نہ ہوں
 اور اس معوی سے پہلی اس معوی کو ثابت کرینگے کہ کتاب اور کتاب کی اصل ضرب کے مختلف
 قیمتیں م اور ن کی دو ضفاف اقل کی برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ کتاب کی قیمتوں میں ایک قیمت ہو تو تمام قیمتیں کتاب کی ط کتاب شامل ہونگیں
 اور فرض کرو کہ کتاب کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہو تو کتاب کی تمام قیمتیں کتاب میں
 داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں اصل ضرب کے ط ص \times کتاب \times کتاب میں داخل ہیں
 اسی طرح اصل ضرب کے مختلف قیمتوں کی تعداد وہی ہوگی جو کتاب \times کتاب کی ہے فرض کرو
 کہ م اور ن کا دو ضفاف اقل ہے تو (کتاب \times کتاب) = ۱

پس کتاب \times کتاب برابر واحد مرتبہ کے نزول کی ہی ہوا سطر کے مختلف قیمتوں
 زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

لیکن ہم کو یہ ثابت کرنا باقی رہا کہ کتاب \times کتاب فی الحقیقت مختلف قیمتیں رکھتا ہے
 فرض کرو کہ م و ن عظم اور ن کا ہی اور م = لو پس کتاب کی دو قیمتیں کتاب
 کی قیمتوں میں داخل ہیں اور کتاب \times کتاب کی قیمتیں اصل ضرب کے کتاب کی
 قیمتوں اور کتاب کی قیمتوں کے اصل ضرب کے مختلف ارقام ہیں اور یہ قیمتیں مختلف ہونگیں
 فرض کرو قیمتوں میں سے دو قیمتیں م اور م ہیں اور قیمتوں میں سے دو قیمتیں م اور م
 برابر مہ کی نہیں ہو سکتا اس واسطے کہ اگر مہ = مہ تو مہ = مہ دایں طرف کارکن
 ایک قیمت مساوات لا۔ مہ کی ہی اور دایں طرف کارکن ایک قیمت مساوات لا۔ مہ کی ہی
 اور ان مساواتوں کو نئی قیمت مشترک سوا واحد کے بموجب دفعہ ۱۴۲ کے نہیں ہو سکتی

(۱۴۲) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول طرح بیان کیے جاتے ہیں کہ ہم کو معلوم کہ کتاب \times کتاب = کتاب اور

اگر $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ کو مختصر الحدین بنائیں تو شمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور اسے نسبت شمار ہوگا
اس طرح $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ اور اسکی مختلف قیمتیں ہیں یہ ہر کیلئے ثابت کی مضحکہ ہی کیونکہ جبر مقابلہ
میں جو معمولی مسئلہ مقدار سیرام کا لکھا گیا ہے وہ مقدار سیرام کی حسابیہ قیمتوں کے واسطی
ثابت کیا گیا ہے اس واسطی اسی ہر تباط $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ موافق اوس معنی
کے جو یہاں لکھی گئی ہیں نہیں ثابت ہوتا ہے

بارہوان باب معادلات مکعبی

(۱۴۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی باب میں بحث کرنی یہاں فضول ہی سہی کی مفصل
حال جبر مقابلہ میں بیان ہو چکا ہے اس باب میں فقط درجہ سوم کی مساواتوں ہی کو معادلات مکعبی
کہتے ہیں بحث ہوگی

دفعہ ۱۵ میں ہم فی ثبوت ثابت کیا ہے کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ دوسری سری رقم
جس مساوات مکعبی میں دوسری رقم نہ ہو اسکی قیمتوں کی بہت خاصا جمعی بنبت کامل مساوات
مکعبی کے قیمتوں کی ہوتی ہیں ایسی ہم یہ فرض کر لیتی ہیں کہ جن مکعبی مساواتوں کو ہم حل کرتی ہیں جنہیں
دوسری رقم نہیں ہے جس عمل کو اب ہم کہیں گے اسکا نام کارڈن کا حل مکعبی مساوات کا ہے

(۱۴۴) مساوات $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $a = 1$ اور d اور c بالفضل دو مقدار صحیحوں ہیں

اسکو مساوات مفروضہ میں لاکر جگہ رکھو تو

$$(x + y)^3 + (x + y)^2 + (x + y) + r = 0$$

$$\text{یعنی } x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + (x + y)^2 + (x + y) + r = 0$$

ہم فی صرف دو مقدار اور x کی باب میں ایک ہیئت فرض کی ہے کہ انکا مجموعہ مساوات
مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلیئے ہم کو اختیار ہے کہ کوئی دو سرکات بھی اونکی باب میں فرض کریں
وہ دو مقدار صحیحوں میں اونکی واسطی دو شرائط مقرر کر سکتی ہیں فرض کرو کہ $3xy + x + y + r = 0$

$$0 = r^3 + r^2 + r$$

ی کی قیمت ارقام زمین مستخرج کرو تو

$$0 = r^3 + r^2 + r$$

$$0 = r^3 + r^2 + r$$

$$\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}} = r^3 - r^2 - r$$

$$\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}} = r^3 - r^2 - r$$

اور نیز لا = د ی اب ہم ۲ اور ۱ کے قیمتوں میں اوپر کی علامت لیں تو
اور نیچے کی لیں تو دونوں صورتوں میں ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطی ہم اوپر کی علامت لیتے ہیں تو

$$0 = \left[\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}} - r^3 \right] + \left[\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}} + r^3 \right]$$

پس لاکے واسطی جو جملہ ہی او میں دو جزء الکعب ہیں اور ہر مقدار کے تین جزء الکعب ہیں تو اب
ہم کو یہ دریافت کرنا چاہی کہ بالفعل کونسی جزء الکعب لینی چاہی فرض کرو کہ

$$r^3 = (r^3 - r^2 + r)$$

تو بموجب فتح ۱۴۰ کے اگی تین جزء الکعب اور سہ اور سہ ہیں اب فرض کرو کہ

$$\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}} = r^3 - r^2 + r$$

م سہ اور م سہ ہونگے اور $\left(\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right) \sqrt[3]{\frac{r^3}{r^2} + \frac{r^2}{r^2}}$ کے جزء الکعبوں میں سی

ایک جزء الکعب کوں تعبیر کرتا ہی تو اور جزء الکعب ن سہ اور ن سہ ہیں

لا کے جملہ میں جو جزء الکعب واقع ہوتی ہیں ان میں سی ہر ایک کی واسطی او کی تین قیمتوں میں

ہر ایک قیمت لگائیں تو ہم کو کل نو قیمتیں حاصل ہونگیں لیکن کعبی مساوات کی صورت میں

قیمتیں ہوتی ہیں تو اسی نتیجہ نکلتا ہی کہ اون نو قیمتوں میں سی صرف تین قیمتیں مساوات

میں داخل رکھتی ہیں اور باقی خارج ہیں اور فی الحقیقت عمل حل میں $r^3 = r^2 - r$

ایک شرط ہی پس جو قیمتیں اس شرط کو پورا کریں وہی قیمتیں مساوات میں دخل رہتی ہیں
فرض کرو کہ م اور ن ایسی معترک کی گئی ہیں کہ وہ شرط م ن =۔۔ قی کو پورا کرتے ہیں
تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ د = م اور ی = ن کے قیمتیں دخل پذیر ہوئیں اور د = سہم
اور ی = سہن کی ہی حاصل ہوگا اور د = سہم اور ی = سہن کے ہی حاصل ہوگا
کیونکہ دو تو صورتوں میں ارتباط د ی =۔۔ قی کی شرائط پوری ہوتی ہیں مگر کوئی اور زوج
قیمتوں کا دخل نہیں ہو سکتا تمثیلاً فرض کرو کہ د = م اور ی = سہن تو د ی =۔۔ سہن
کی حاصل ہوگا اور۔۔ قی کی برابر نہیں حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتوں سی
د ی =۔۔ سہن یا =۔۔ سہن کے حاصل ہوگا اور۔۔ قی نہیں حاصل ہوگا
اسلی سوا اور ن ازواج قیمتوں کی جنگی دخل کی کیفیت اوپر بیان کر ائی ہیں اور کوئی زوج
قیمتوں کا شرائط کو ایفا نہیں کر لگا

(۱۴۵) تمثیلاً فرض کرو کہ لا + ۳ - ۵۷ = ۲۰ - یہاں قی = ۱۴ اور د = ۲۰ - پس

$$۵ = (۱۰ + ۱۰۸) + (۱۰ - ۱۰۸)$$

عدد ہی حساب لگانے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$(۱۰ + ۱۰۸) = ۳۲۷ اور (۱۰ - ۱۰۸) = -۳۲۷$$

پس اسی ہم گان کرتی ہیں کہ لا = ۲ کے ہوگا اور امتحان سی یہ معلوم ہی ہوگا کہ لا = ۲ کی ہی
اب در دو قیمتوں کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کے لئے یہ بہتر ہوگا
کہ ہم مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کریں چونکہ ۲ قیمت مساوات
مفروضہ کی ہی اسلی لا + ۳ - ۵۷ = ۲۰ پورا لا - ۲ بقسم ہوگا اور یہ ہم کو در یافت ہوگا کہ

$$۵ = (۲ - ۵۷) + (۱۰ + ۵۲)$$

باقی دو قیمتیں مساوات کی اس مساوات

$$۵ = ۱۰ + ۵۲$$

اور باقی دو قیمتیں m سہ + n سہ اور m سہ + n سہ ہوئیں اور یہ کی قیمت مندرج کرنے سے جدا گانہ یہ قیمتیں ہوئیں کہ

$$\frac{1}{p} (m+n) + \frac{1}{q} (n-m) = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{p} (m+n) - \frac{1}{q} (n-m) = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$$

اور یہ تخلی قیمتیں ہیں بشرطیکہ $m = n$ کے نہ ہو اور جب $m = n$ تو مکعبی مساوات کی دو برابر قیمتیں ہوئیں اور ہر ایک انہیں ہی برابر m یا n کے ہوگی اس شرط ضروری جسی یہ تحقیق ہوگا کہ $m = n$ یعنی $2 = 3$ کے یہی کہ $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ -

بالعکس کے اگر مکعبی مساوات کی قیمتیں تمام صلی ہوں اور غیر صلی ہوں تو 2 اور 3 کی جملہ قیمتیں

یہ فرض کرو کہ 2 اور 3 کی جملہ خیالی ہیں یعنی فرض کرو کہ $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ منفی مقدار ہے تو یہ

2 کی ہم کو یہ دریافت ہوگا کہ 2 اور 3 میں ہی ہر ایک جزو الگ خاص صورت کا ہوگا اس واسطے

ہم فرض کرتے ہیں کہ $m = 2$ اور $n = 3$ اور چونکہ 2 اور 3 میں خرق علامت جذبین ہے اس واسطے

$n = 2$ اور $m = 3$ اس صورت میں مکعبی مساوات مفروضہ کی تمام صلی قیمتیں ہیں یعنی

$$2 + 3 = 5 \text{ اور } 3 - 2 = 1 \text{ یعنی } 2 \text{ اور } 3$$

$$(2 + 3) (3 - 2) = 5 (1) \text{ سہ یعنی } 5 - 1 = 4$$

$$\text{اور } (2 + 3) (3 - 2) = 5 (1) \text{ سہ یعنی } 5 - 1 = 4$$

(۱۰۱) مکعبی مساوات کا حل جو کارڈ میں حساب کا ہی اسے عملاً ایسی صورت میں کچھ فائدہ نہیں حاصل ہوتا

کہ مساوات کی سب قیمتیں صلی اور غیر صلی ہوں اس واسطے کہ اس حالت میں جملہ 2 اور 3 کے

تخلی ہوتی ہیں اور گو ہم اس بات کو جانیں کہ اوٹکی جزو الگ ہے مگر کوئی ترکیب انکی

لکائی کی از روی علم صاحب نہیں ہی پس ایسی صورت میں ہم کو قیمتیں صورت جبر یہ معلوم

ہو جاتی ہیں مگر ان کا حساب عددی نہیں ہو سکتا اسلی وہ حساباً کچھ وقت نہیں

رکھتی مثلاً یہ مساوات لو کہ

$$= ۳ - ۱۵ - ۴ = -۱۶$$

یہاں $r = -۱۶$ اور $q = -۱۵$ سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{3}(\sqrt{121-4}+2) + \frac{1}{3}(\sqrt{121-4}-2) = ۱۱$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{3}(\sqrt{121-4}+2) + \frac{1}{3}(\sqrt{121-4}-2) = ۱۱$$

اب یہاں ظاہر ہے کہ کوئی جزء الکعبہ لگانی کا طریق نہیں ہی امتحان ہی یہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{121-4} + 2 = \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} + 2)$$

$$\sqrt{121-4} - 2 = \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} - 2)$$

$$\text{پس } ۱۱ = \sqrt{121-4} + 2 + \sqrt{121-4} + 2 = ۴ + ۲\sqrt{121-4}$$

پس ۴ قیمت ہی اب اور قیمتیں دفعہ ۱۶۴ اسی دریافت ہو سکتی ہیں یا اس طرح عمل کرنی سی کہ

$$۳ - ۱۵ - ۴ = (۴ - ۱۱)(۱۱ + ۴ + ۱)$$

پس ہم کو یہ مساوات حل کرنی پڑے گی کہ $۴ + ۱۱ + ۱ = ۰$ اور اس کی قیمتیں ۳ ± ۲ ہیں

اب مساوات $۳ - ۱۵ - ۴ = ۰$ پر خیال کرو

یہاں $r = -۱۶$ اور $q = -۱۵$ پس

$$\frac{1}{3}(\sqrt{121-4}+1) + \frac{1}{3}(\sqrt{121-4}-1) = ۱۱$$

یہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{121-4} + 1 = \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} + 1) + \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} - 1)$$

$$\sqrt{121-4} - 1 = \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} - 1) - \frac{1}{3}(\sqrt{121-4} + 1)$$

$$\text{پس } ۱۱ = \sqrt{121-4} + 1 + \sqrt{121-4} - 1 = ۲\sqrt{121-4}$$

اور باقی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں اور وہ یہ ہیں کہ

$$\frac{1}{3} - ۱۵ - ۴$$

(۱۶۱) جو صورت کعبی مساوات کی ایسی ہے کہ اس کی قیمتیں صاف اور غیر مساوی ہوں اس صورت کو معلوم کرنے کے لئے

اور بعض اوقات یہ کہتی ہیں کہ اس صورت میں قاعدہ کارڈن کا نہیں چلتا ان جملوں سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ جیسے جیسے صورتیں نمایان ہوتی ہیں کہ اوکی حساب لگانی میں بڑی قوت اور دشواری عاید ہوتی ہے لیکن ضابطہ جملہ نمائی کی استعانت سے جملہ $ع + ق - ۱۳۸$ کی صورت کی جملہ کی تقریباً ہم دریا کرتی ہیں اگر ق تعداد پھوٹا $ع$ سی ہو تو $(ع + ق - ۱۳۸)$ کو سلسلہ الضامی میں

موافق قوا متصاعدہ $ق - ۱۳۸$ کے پہلے میں جبر مقابلہ ۳۴ باب دیکھو پس

$(ع + ق - ۱۳۸)$ کو تقریباً $ع + ق - ۱۳۸$ کے صورت میں لاسکتی ہیں

اور $(ع - ق - ۱۳۸)$ کو تقریباً $ع - ق - ۱۳۸$ کی صورت میں

اور مجموعہ ان جزو الکعبون کا $۲ع$ ہوگا لیکن اگر ق تعداد بڑا $ع$ سی ہو تو ہم سطح عمل کرتے کہ

$$ع + ق - ۱۳۸ = ۱۳۸ - (ع - ق)$$

اسی معلوم ہوا کہ $(ع + ق - ۱۳۸) = ۱۳۸ - (ع - ق)$

اب $۱۳۸ -$ کا جزو الکعب امتحان سی ۱۳۸ معلوم ہوتا ہی پس یہ حاصل ہوگا

$$(ع + ق - ۱۳۸) = ۱۳۸ - (ع - ق)$$

اور ہم $(ع - ق - ۱۳۸)$ کو سلسلہ الضامی میں قوا متصاعدہ $ع - ۱۳۸$ کی پہلا سکتی ہیں

اور یہ موافق سابق کی مجموعہ $ع + ق - ۱۳۸$ اور $ع - ق - ۱۳۸$ کا دریافت کر سکتی ہیں

یہ صورت کر $ع = ق$ کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال میں شامل ہی

اس بات پر یہی غور کرنی چاہی کہ ضابطہ دی مولور کے وساطت سے مقدار $ع + ق - ۱۳۸$ کا جزو الکعب

اسی صورت میں بیان ہو سکتا ہے کہ او میں علم مثلثی جملے ملتق ہوں

(۱۴۲) دفعات گذشتہ سی ظاہر ہوتا ہے کہ کمی مساوات $۱۳۸ + ق - ۱۳۸ = ۰$ ہمیشہ کارڈس کے

عمل سی حل ہو سکتی ہی اور جب ق مساوات میں مثبت ہو تو کچھ وقت او میں نہیں واقع ہوتی اور جب

ق منفی ہو اور اسکی ساتھ ق تعداد پھوٹتی $۲ع$ سی ہو تو ان صورتوں میں

قیمتیں خیالی ہوں گیں اگر ق ایک منفی مقدار ہو اور تعداد بڑی $۲ع$ سی ہو تو کارڈس

یعنی $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اسمین ظاہری کہ ایک قیمت لا = ۱ - ۱/۴
اب پھر فرض کرو یہ کہ معنی مساوات کامل ہے کہ

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = ۱$

اور مثال کی درمیان یہاں ربط اس = یا ہی تو مساوات مفروضہ سطح لکھی جائیگی

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$

اسیو $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اسیو $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اسیو $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اسیو $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(۱۵) علم مثلث متوکی، ابابین ایک لکھا ہی جیسی کہ ہم مساوات درج سوم معدوم التحویل کے قیمتیں بذریعہ جداول علم مثلث کی درپا کر سکتی ہیں یہ بات عملاً تو کسی کام کی نہیں لیکن ہم یہ بتلائیگی کہ علم مثلث جداولین سطح اوں مثالوں کی حل کرنی میں ہی کام آتی ہیں جو صورت معدوم التحویل سے متعلق نہیں ہیں

فرض کرو کہ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = ۱$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اگر ق مثبت ہی تو فرض کرو کہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$ برتو یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

اگر ق منفی ہو اور $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ سی ہو تو فرض کرو $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$ جیسا کہ برتو یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(۲) فرض کرو کہ ہر اور کمین سے ایک مثلاً صد قیمت کبھی مساوات کی ہی نو دفعہ ۱۶۷ کی موافق

عمل کرنی سے ثابت ہوتا ہے کہ کبھی مساوات کی ہی ایک اصل قیمت چھوٹی گئی ہے
پس اس کی دو اصل قیمتیں ہیں تاگزیر تیسری قیمت ہی اصل ہوگی اور اس طرح اگر ایک قیمت
کبھی مساوات کی ہو تو ایک اصل قیمت اس کی بڑی بہ نسبت صد کی ہوگی اسلی ضروری کہ تیسری قیمت
(۱۶۸) اب ہم اس شرط کی تحقیقات کرنی ہیں جسکی موافق صد یا ایک قیمت مساوات کبھی ہو

فرض کرو کہ ہر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی ہی ہے
چونکہ مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اسلی

$$(1) \quad (1-r) - 1 = 0 \quad (1)$$

اور چونکہ ہر مساوات کبھی کی ہی قیمت فرض کی گئی ہے اسلی یہ حاصل ہوگا کہ

$$1 + (1-r) + (1-r)^2 + \dots = 0 \quad (2)$$

(۱) اور (۲) سے یہ مستط ہوتا ہے کہ

$$1 + (1-r) + (1-r)^2 + \dots = 0 \quad (1)$$

$$1 + (1-r) + (1-r)^2 + \dots = 0 \quad (1)$$

$$1 + (1-r) + (1-r)^2 + \dots = 0 \quad (1)$$

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$1 - r = 0 \quad (4)$$

$$1 - r = 0 \quad (5)$$

اسی ثابت ہوا کہ کبھی مساوات کی مثال میں ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ

مساوات درجہ دوم کی قیمتوں میں سے ایک قیمت کبھی مساوات کی ایک قیمت ہو

بالعکس اسکی اگر (۵) مستحکم ہو تو (۴) سے تحقیق کر کے دیکھیں کہ ایک قیمت مقرر کریں تو

دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہو جائیں گی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم

ایک قیمت مشترک ہو جائیگی

(۱۷۵) مساوات مکعبی کی قیمتوں کی برابر ہونی کی شرائط ہم تحقیق کرتے ہیں
اگر وہ اورک میں سے کوئی ایک ہی قیمت مکعبی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۱۷۴ کی انبات معلوم ہوتا ہے کہ
مساوات مکعبی کی قیمتیں غیر مساوی ہوں دفعہ ۱۷۴ کا عمل ان درجہ کی مساواتوں سے ہر ایک پر
(لا-س) (لا-ا) - ب^۲ = ۰ یا (لا-ا) (لا-ب) - س^۲ = ۰

بجای مساوات درجہ دوم (لا-ب) (لا-س) = ا^۲ کے چل سکتا ہے
اسی ثابت ہوتا ہے کہ مکعبی مساوات کی برابر قیمتیں نہیں ہو سکتیں جب تک ا و ب کی اور ان درجہ دوم کی
مساواتوں میں سے ایک مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو

اسی ثابت ہوا کہ مساوات (۵) سے شرائط لازمی مساوات مکعبی کی برابر قیمتوں کے واسطی یہ حال ہو گئیں
۱ - س^۲ = ب^۲ - س^۲ = ا^۲ - س^۲

بالعکس سکی اگر ہم شرائط مستحکم ہوں تو مساوات مکعبی کی قیمتیں برابر ہو گئیں دلیل سکی یہ ہے
کہ ان برابر مقادیر کو ر سے تعبیر کرو

تو ۱ = ر + س^۲ اور ب = ر + س^۲ اور س = ر + س^۲
۱ اور ب اور س کی جگہ ان قیمتوں کو مکعبی مساوات میں مندرج کرو تو
(لا-ر) - ۳ = (لا-ر) (۲ - (س^۲ + س^۲ + س^۲) = (س^۲ - س^۲) = ۰

پس قیمت ر مکرراتی ہے اور اور قیمت یہ ہے کہ

$$ر + س^۲ + س^۲ + س^۲ = ۰$$

تیسرے عنوان باب معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معادلات درجہ چہارم کی حل کرنی کی بعض ترکیبیں ہم بیان کرتے ہیں
اوس دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۷۵ میں بیان ہوئی ہم مساوات درجہ چہارم کو بغیر دو سر درجہ
کی فرض کرنی ہیں اول حل جبکہ ہم بیان کریں گے دس کا طریقہ حاصل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات لا + ق لا + ر لا + ص = کو حل کرو
فرض کرو لا + ق لا + الا + ص = (لا + ص لا + ق) (لا - ص لا + گہ)
اب ہم کو اس بات پر ناچار ہیں کہ مقدار ص دت دگہ کو کس طرح دریافت کر سکی ہیں
بائیں طرف جو اجزاء ضربی لکھی ہیں انکو باہم ضرب دو اور دونوں ارکان کی مثال
لا کے یکساں قوتوں کے اسپین برابر لکھو تو پچھل ہو گا کہ
گہ + ق - ص = ق اور ص (گہ - ق) = ر اور گہ + ق = ص
یعنی کہ ق + ص اور گہ - ق = ص اور گہ + ق = ص
ان مساواتوں میں سے اول اور دوم مساوات سے کہ اور ق کو ص کی ارقام میں دریافت کر کے
تیسرے مساوات میں منسوخ کرو تو

$$(ق + ص + ق) (ق + ص - ق) = ص$$

تحویل اور اختصار کرنی ہی اس مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص + ۲ ق + ص = (ق - ص) (ق + ص) = ۲ - ص$$

اس مساوات کو ص دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات کبھی سچہ سکتی ہیں اور ہم کو یقینی ایک حقیقی
مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب ص ہم کو معلوم ہو گیا تو اسی ص معلوم ہو گا اور
پھر کہ اور ق معلوم ہو جائیگا پس جملہ لا + ق لا + ر لا + ص دو حقیقی اجزاء ضربی میں تحلیل ہو جائیگا اور
ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں ان درجہ دوم کی مساواتوں کی حل کرنی ہی حاصل ہو جائیگا۔
لا + ص لا + گہ = - اور لا - ص لا + گہ = ۰

(۱۸۲) یہ بات غور طلب ہے کہ ہم فی دو اجزاء ضربی جو درجہ دوم کے فرض کی ہیں ان میں سے ایک
میں رقم ص لا فرض کی ہے اور دوسرے میں - ص لا اور دلیل اسکی یہ ہے کہ جس جملہ کی ہم
تحلیل اجزاء درجہ دوم میں کرنا چاہتے ہیں اس میں رقم لا کی ملتف نہیں ہے اب دوسری
مساوات درجہ دوم کی جو آخر میں دفعہ بالا کی لکھی ہے اسکی دو نو قیمتوں کا مجموعہ ص ہی اسکی مساوات

درجہ چہارم مفروضہ کی دو قیمتوں کا مجموعہ صفری اور مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتوں میں سے دو دو کو $\frac{3 \times 2}{2 \times 1}$ طرح سے یعنی ۶ طرح سے منتخب کر سکتی ہیں اور اسی دلیل سے مساوات صہ کی چہم درجہ کی حاصل ہوتی ہے لیکن اس سبب سے کہ موافق دفعہ ۲۵ کے مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتوں کا مجموعہ صفری اسٹی مجموعہ قیمتوں کا متبادل مقدار اور مختلف علامت باقی دو مقداروں کے مجموعہ ہوگا پس یہی دلیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات صہ کی قیمت قواعد سطح ملحق ہوتی ہیں کہ صہ کی قیمتیں کچھ مساوات کی حل کرنی سے دریافت ہوجاتی ہیں جب صہ ہم کو دریافت ہو جائے تو ہم کو او اسکی جذر نکالنے سے جو دو قیمتیں مختلف علامت دریافت ہوں گی وہیں سے ہر ایک کو کام میں لا سکتی ہیں اس واسطی کہ صہ کی مختلف علامتوں کی کام میں لانے سے قیمتیں متاثر اور گہ کی قضا پسین بدل جائینگے اور اس تبدل سے اثر اول نتائج پر کچھ نہیں ہوگا چہ مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے میں کام آئے ہیں

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ لآ - ۱۰ لآ - ۲۰ لآ - ۱۴ = یہاں ق = ۱۰ اور ر = ۲۰ -
اور ص = ۱۴ مساوات کبھی صہ کی یہ حاصل ہوگی کہ صہ = ۲۰ صہ = ۱۴ صہ = ۲۰ -
اور ایک قیمت اسکی صہ = ۲ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صہ = ۲ ٹوٹ = ۲ اور گ = ۸ -
لآ - ۱۰ لآ - ۲۰ لآ - ۱۴ = (لآ + ۲ + ۱۴) (لآ - ۱۰ - ۲ - ۱۴)

دلیل فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اور $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ کے
تغیر ہوں تو اس سبب کہ چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی تو حقیقی قیمتیں $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اور $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ کے
کی ہونگی ان قیمتوں میں ہر زوج کے مجموعہ سے یہ جملے حاصل ہونگے کہ
 $x^2 + 2x + 1 = 0$ اور $x^2 - 2x + 1 = 0$ (۱-۲)

پس تین قیمتیں $x^2 + 2x + 1 = 0$ کی یہ ہونگی $x = -1$ اور $x = -1$ اور $x^2 - 2x + 1 = 0$ کی یہ ہونگی $x = 1$ اور $x = 1$ اور اگر صفر نہ ہو تو
اگر صفر نہ ہو تو $x^2 + 2x + 1 = 0$ کے ان قیمتوں میں سی دو خیالی ہونگی اور اگر صفر ہو تو
ہے کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگی لیکن ان میں سے دو برابر ہیں اسلیئے کبھی مساوات $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ کی صورت
معدوم التحویل نہیں ہوگی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات کبھی مستعان کی قیمتیں ہی نہ ہوں گی
اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتیں ہوں تو وہ ان

$x^2 + 2x + 1 = 0$ اور $x^2 - 2x + 1 = 0$ کی ہونگی ان قیمتوں میں سی ہر زوج کے
مجموعہ سے یہ جملے حاصل ہونگی کہ $x^2 + 2x + 1 = 0$ اور $x^2 - 2x + 1 = 0$ (۱-۲)

پس قیمتیں $x^2 + 2x + 1 = 0$ کی $x = -1$ اور $x = -1$ اور $x^2 - 2x + 1 = 0$ کی $x = 1$ اور $x = 1$ اور اسلیئے حقیقی قیمتیں ہیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں یا خیالی قیمتیں ہوں تو کبھی مساوات
مستعان اکثر معدوم التحویل ہوگی ہم فی جو یہہ لکھا ہی کہ مساوات اکثر معدوم التحویل ہوگی

تو اسکا سبب یہ ہے کہ ممکن ہے کہ مساوات کبھی کی دو قیمتیں برابر ہوں تو ہر وقت وہ معدوم التحویل ہوں گے
(۱۸۶) ہم فی اوپر کی دو صورتوں میں یہ بتلایا ہی کہ مساوات کبھی مستعان کی قیمتوں کی صورت میں

موافق مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کے کیا ہونگی یا ہم اسکی بالکس لکھتی ہیں
کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کی صورت میں موافق مساوات کبھی مستعان کی قیمتوں کے

کیا ہونگی چونکہ مساوات کبھی کی آخر رقم منفی ہی اسلیئے ایک قیمت مثبت ہوگی اور چونکہ مجموعہ قیمتوں کے
حاصل ضرب قیمتوں کا مثبت ہی تو یہ صورتیں دافع ہونگی (۱) تمام قیمتیں مثبت ہوں (۲) ایک

ہو اور دوسری قیمت ہو (۳) ایک مثبت قیمت اور دو خیالی قیمتیں تو بموجب دفعات ۱۸۵ اور ۱۸۶ کے
نتیجہ مفصلہ ذیل حاصل ہو سکے

(۱) اگر مساوات کبھی کی تمام قیمتیں مثبت ہوں تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتیں حقیقی ہوں گیں
(۲) اگر مساوات کبھی کی ایک مثبت قیمت ہو اور دوسری قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کے دو قیمتیں حقیقی اور
دو قیمتیں خیالی ہوں گیں یا چاروں قیمتیں خیالی ہوں گیں

(۳) اگر کبھی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو خیالی قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں
اور دو خیالی قیمتیں ہوں گیں

(۱۸۶) مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں بہت سادگی کی مانند کبھی مساوات تین قیمتوں میں بدل
فرض کرو کہ $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ اور $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ سے تعبیر ہوں جو مساوات سی حاصل ہوتی ہیں کہ
 $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳)

تو بموجب دفعہ ۱۸۵ کے یہ حاصل ہوتا ہے کہ $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ اور

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ اور $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ کے رکھیں اور $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ سے لیں تو

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳)

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳)

اسیو مساوات $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ کے حل کرنی ہی ہم کو یہ حاصل ہو گا کہ

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳)

اور اس طرح $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ کے حل کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳)

پس مساوات درجہ چہارم کی یہ چار قیمتیں حاصل ہوں گیں کہ

$۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۱) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۲) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۳) $۲ق + ۳ص + ۴ل = ۵$ (۴)

(۱۸۸) ایک اور طریقہ مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی مختلف ہندسوں کے لکھی ہی انہیں کہ تھوڑی ہی فرق ہے

باب سیزدہم
اور اس ترکیب کا نام کہی تو فرس کی ترکیب کہی وارنگ کی ترکیب اور کہی سمپسن کی ترکیب
ہے اب ہم اس کو بیان کرتے ہیں
فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہ ہو کہ

$$لا + ع + لا + ق + لا + ص = ۰$$

طرفین پر لا + ب + لا + س زیادہ کرو اور لا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر ایک طرف مساوات
کی مراح کامل نجای تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$لا + ع + لا + (ق + لا) + (ر + ب) + لا + ص + س = لا + ب + لا + س$$

بائیں طرف کا ر کے مساوات مجذور کامل ہو گا اگر $۲ = لا + س$ کے ہوا میں طرف کی ر کے
فرض کرو کہ وہ برابر

$$(لا + ع + لا + م)$$

کے ہو تو مثال کے مقابلہ کرنے سے یہ حاصل ہو گا کہ

$$۲ + م + ع + ق + لا + اور م = ر + ب + اور م = ص + س$$

یہ تین ارتباط لا اور ب اور س کو ارقام م میں بیان کرتی ہیں لا اور ب اور س کی قیمتوں کو
مساوات $۲ = لا + س$ میں مندرج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع - م - ر) = ۲ = (۲ + م + ع - ق) (م - ص)$$

اس یکجہ مساوات سے م دریا ہو اور پھر لا اور ب اور س معلوم ہونگی اور چونکہ یہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$(لا + ع + لا + م) = لا + ب + لا + س = لا + ب + لا + \frac{۲}{لا + س}$$

$$اسی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ لا + ع + لا + م = \frac{لا + ب + لا + ۲}{لا + س}$$

بس ہم کو دو مساواتیں درجہ دوم کی حل کرتی پڑینگے یعنی

$$لا + ع + لا + م + \frac{لا + ب + لا + ۲}{لا + س} = ۰ \text{ اور } لا + ع + لا + م = \frac{لا + ب + لا + ۲}{لا + س} = ۰$$

(۱۸۹) یہاں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اس ترکیب میں جس کی مساوات مستعان کی حل کرنی کا

کام مسم کو ستر تا ہی دہ اگر معدوم التحویل ہوگی بشرطیکہ مساوات درجہ پہارم کی دو حقیقی قیمتیں
اور دو خیالی قیمتیں نہ ہوں دلیل فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ پہارم کی چار قیمتوں کو
سہ صنفہ و لرو فر تعبیر کرتی ہیں تو دفعہ ۱۸۸ میں دوسرا وائین درجہ دوم کی حاصل ہوئیں ہیں
اول پر خیال کرنی سی پہلے نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ $m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ برابر چاروں مقادیر سہ صنفہ و لرو فر
میں سی دو کی حاصل ضرب کے ہوا اور $m - \frac{1}{2}$ باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ
 $m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{سہ صنفہ اور } m - \frac{1}{2} = \text{لرو فر}$

پس $m = \frac{1}{2}$ (سہ صدہ + لکھ)
پس یہاں فریقہ سی پہنچے مستط کرتی ہیں کہ m کی دوا اور قیمتیں $\frac{1}{2}$ (سہ لکھ + صدہ فر)
اور $\frac{1}{2}$ (سہ فر + صدہ لکھ) ہوں گے

یہ ظاہر ہے کہ اگر سہ حصہ دلوں پر تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو کم کی یہ تینوں قیمتیں حقیقی ہونگی اور اگر تمام سہ حصہ دلوں پر تمام خیالی ہوں تو یہی تینوں قیمتیں حقیقی ہونگی لیکن اگر چاروں قیمتوں میں سے دو خیالی اور دو حقیقی قیمتیں ہوں تو یہ نتیجہ نکلی گا کہ کم کی دو قیمتیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی بااؤنکی تمام حقیقی قیمتیں ہیں اور دو ادنیٰ سی برابر ہیں

(۱۹) اب ہم یو لبر کی ترکیبیاوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی لکھتی ہیں فرض کرو کہ مساوات چہارم ہے

$$= \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

فرض کرو کہ $\lambda = r + \mu + \nu$ پس

$$(500 + 100(5 + 5)) + 100 + 10 + 5 = 11$$

یعنی لا۔ ذ۔ می۔ ص = (ی + ی + ی + ص + ص + ص)

طرفین کا مجذور کرو تو

$$N = (x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + y^2 + z^2) + \dots$$

$$n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

۱۔ = ۲۔ کا مجذور کیا گیا تھا اور وہ عمل میں اس صورت ڈالی تھا = ۳۔
 میں کام آیا تھا پس اس سبب کے ارتباط دوسرے صورت میں علامت رک کی تبدل ہی نہیں بدلتا تو
 عمل میں فی الحقیقت قیمتیں مساوات درجہ چہارم لا + ق لا - ر لا + ص = ۱۰ اور نیز مساوات
 درجہ چہارم لا + ق لا + ر لا + ص = ۰ کی کام میں اتنی ہیں پہلی چار کی اٹھ قیمتیں ہو جائیں
 دفعہ ۱۸۱ کی ملجبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ کی ملجبی مساوات سے تطبیق ہو جائیگی
 اگر ۲ = ۳ ط کے فرض کریں پس دفعات ۱۸۷ - ۱۸۴ تک میں جو مساوات
 ملجبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتوں کے ارتباط اور وہ صورتیں
 جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہیں لکھی ہیں وہ جیسی کہ ڈس کا ٹریس کی ترکیب سے متعلق ہیں
 ایسی ہی جو مرکب سے بھی متعلق ہیں

(۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا یہ نسبت عام صورت مساوات درجہ چہارم کے ہیں
 مثلاً یہ مساوات درجہ چہارم

$$لا + ع لا + ق لا + ر لا + ص = ۰$$

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہے اگر ۳ - ۴ ع ق + ۸ = ۰ کے مساوی کی
 مساوات لا + ع لا + ق لا + ر لا + ص = ۰ کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$لا (لا + ع) + ق (ق - ع) + ر (لا + ع) + ص = ۰$$

اور یہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہے اگر ۲ - ۳ ع ق = ۴ کے ہوں یعنی اگر ۳ - ۴ ع ق + ۸ = ۰

چودھواں باب سُرم صبا کا ضابطہ

(۱۹۳) البواب گذشتہ میں ہم فی معادلات کی قیمتوں کی مسائل اور تیسری اور چوتھی درجہ کی
 مساواتوں کی حل کرنی کی ترکیبیں لکھیں ہیں مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکھتے ہیں یعنی معادلات
 کی عددی تقریبی قیمتیں کن ترکیبوں اور حکمتوں سے دریافت ہوتی ہیں آغاز میں مضمون کا
 سُرم صبا کی ضابطہ سے ہوتا ہے اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہیں اور اسکا مطلب یہ ہے

کرا کیساوات کی قیمتوں کا مقام اور مقدار حقیقی قیمتوں کی تشخیص ہو جائے
دفعہ اندہ میں ضابطہ کو ثابت کیا ہے اور یہ کہ جو کیفیتیں اس ضابطہ کی لکھی ہیں اور بنیادوں کے موافق مشاغلوں کے
(۱۹۴) سٹرم حساب کا ضابطہ فرض کرو کہ (لا) = مساوات ہو جن میں مساوی قیمتیں خارج

ہو گئی ہیں اور ج (لا) کا اول حملہ مشتق (لا) ہو اور یہ ج (لا) اور ج (لا) عمل
وفق اعظم دریافت کرنی کا کیا گیا ہو مگر اس میں یہ تہم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندر چلی ہو اور کی
علامتیں بدلی گئی ہوں اور پر وہ باقی معشوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک
باقی ایسی حاصل ہو کہ اس کو کچھ لگاؤ لاسی نہ ہو اور اس باقی کی بھی علامتیں بدلی گئی ہوں

فرض کرو کہ اس طرح جو باقیات تہم شدہ حاصل ہوں وہ اس سلسلہ ج (لا) وج ۲ (لا) ۰۰ ج ۲ (لا)

سی تعبیر ہوں فرض کرو کہ سہ کوئی مقدار ہو اور صد ایک اور مقدار ہو جو از روی جبر بمقابلہ بڑی سہ سی

تو مساوات ج (لا) = کی حقیقی قیمتوں کی تعداد در بیان ہے اور صد کی برابر اس زیادتی کی ہوگی

جو سلسلہ ج (لا) اور ج (لا) اور ج (لا) ۰۰ ج ۲ (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کو اس حالت میں کہ لا = سہ کی ہو

اس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہی کہ جب لا = صد کے ہو

تمام سلسلہ ج (لا) وج ۱ (لا) وج ۲ (لا) ۰۰ ج ۲ (لا) کو سٹرم کے حملے کہتے ہیں اور

سلسلہ ج (لا) وج ۲ (لا) ۰۰ ج ۲ (لا) کو مستعان حملے کہتے ہیں مستعان حملی وہی ہیں

جو سٹرم کے حملی ہیں مگر ان میں سی ج (لا) خارج ہے

فرض کرو کہ ق ۱ وق ۲ ۰۰ ق ۱ - متواتر خارج قیمتوں کو جو عمل مذکور سے پیدا ہوتی ہیں

تعبیر کرتے ہیں تو یہ ارتباطات حاصل ہونگے

$$ج (لا) = ق ۱ ج (لا) - ج ۲ (لا)$$

$$ج (لا) = ق ۲ ج (لا) - ج ۳ (لا)$$

$$ج ۲ (لا) = ق ۳ ج ۲ (لا) - ج ۴ (لا)$$

$$ج ۳ (لا) = ق ۴ ج ۳ (لا) - ج ۵ (لا)$$

اب ان ارتباطات میں تین نتیجی استخراج کرتے ہیں

اول آخر جملہ ح (لا) صفر نہیں ہی اس واسطی کہ بموجب فرض کے اس کو کچھ تعلق لای نہیں ہے اگر وہ صفر ہو تو ح (لا) اور ح (لا) کا چاہی کوئی دفع مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۷۵ کے مساوات ح (لا) = کی برابر قیمتیں ہونی چاہی اور یہ خلاف فرض کے ہے

دوم دو متصل کی جملی مستعان ایک ہی وقت میں معدوم نہیں ہو سکتی اس واسطی کہ وہ معدوم ہو تو پہلے ہونی لگی کی جملی ہی معدوم ہو چ نہیں ح (لا) ہی داخل ہو اور یہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے

سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اس کی متصل کی طرفین جملوں کی علامتیں متضاد ہوتی ہیں مثلاً فرض کرو ح (لا) = تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباط سی ح (لا) = ح (س) = ح (لا) حاصل ہو گا

اب کوئی سٹریم کی جملوں میں کسی جملہ کی اندر علامت تبدیل نہیں ہو سکتا الا اس صورت میں کہ لائی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ اس جملی کو معدوم کر دی اور اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ جب لائی نوبت اس قیمت پر پہنچی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کر دی تو سٹریم کی جملوں میں ایک تغیر علامت گم ہو جائے گا اور اس سبب ہی کہ لائی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کر دے تو کوئی تغیر علامت نہ گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

اول فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) = کی ایسی ہو کہ ح (س) =

فرض کرو کہ وہ ایک مثبت مقدار ہو اب بموجب دفعہ ۱۰ کی ح (س) = وہ قوارصہ میں پہل سکتا ہے اور بموجب دفعہ ۱۷ کی وہ ایسا چھوٹا مقرر ہو سکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول رقم کی علامت ہو جو معدوم نہیں ہوتی یعنی علامت ح (س) = وہی ہو جو علامت = ح (س) کی ہے

کیونکہ ح (س) = اور علامت ح (س) = کی وہی ہوگی جو علامت ح (س) کی ہے

بشرطیکہ وہ کو کافی چھوٹا فرض کریں پس اگر لا = س = وہی ہو اور وہ کافی چھوٹا فرض کیا جاے

تو ح (لا) اور ح (لا) کی مختلف علامتیں ہوں گیں

اسی طرح ہی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + وہی اور وہ کافی چھوٹا فرض کیا جاے

توج (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی
 پس جب لا پڑہ کر مساوات ح (لا) = کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہنچائی تو سٹرم کی جملوں میں سے
 ایک تغیر علامت گم ہو جائے گی
 دوسرے فرض کرو کہ اس ایسی قیمت لا کی ہے کہ مستعان جملوں میں ایک کو معدوم کرنا ہی مشلا ح (لا) کو
 توج ح (س) = توج ح (س) اور ح (س) کی مختلف علامتیں ہوں گیں اور
 ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتیں ح (س) (لا) اور ح (لا) (س) (لا)
 ایک مستقل علامت ہمیشہ رکھیں گی اور ان میں ایک تغیر علامت ہوگا اسطے کہ اگر ح (لا) اور
 ح (لا) کی ایک ہی علامت ہو تو ح (لا) اور ح (س) (لا) کی مختلف علامتیں ہوں گیں اور
 بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کر دے
 اسی سٹرم کی جملوں میں نہ کوئی تغیر علامت گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے
 کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملوں کو معدوم ہو جائے تو اگر ح (لا) ان میں سے ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول سے یہ بنتا ہوگا
 کہ ایک تغیر علامت گم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہو کر اس قیمت پر نوبت پہنچے گی اور اگر ح (لا)
 ان میں سے نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اسد ہوگا کہ کوئی تغیر علامت گم نہیں ہوئی
 پس ہم فی ثابت کر دیا کہ جب لا زیادہ ہوتا ہے تو سٹرم کی جملوں میں کبھی ایک تغیر علامت گم نہیں ہوتا
 اس صورت میں کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = کی قیمت پر پہنچی اور کبھی تغیر علامت پیدا نہیں ہوتا
 پس اسی معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطے گم ہوتی ہے کہ لا زیادہ ایک قیمت سے
 ہو کہ بڑی قیمت صہ پر اپنی نوبت پہنچائی وہ برابر ہوتی ہے مساوات ح (لا) = کی اول قیمتوں کے
 تعداد کے جو درمیان صہ اور صہ کے واقع ہوں
 (۱۴۵) ہم فی ثابت کر دیا ہے کہ سٹرم کی جملوں میں تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل
 اس سبب سے نہیں واقع ہو سکتا کہ لا کی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

معدوم کردی مگر اکثر علامات + اور - کی تشریب میں جملوں کی سلسلہ کی انداز
 تبدیل واقع ہوتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ ۱ اور ب دو قیمتیں (۱) ج (۱) = کی ہو اور ا بدلت ب کی کم کی تو
 ج (۱) اور ج (۱) مختلف علامتیں باقبل ۱ = ۱ کی ہوں گیں اور ایک ہی علامتیں با بعد
 ۱ = ۱ کے ہوں گیں با قبل ۱ = ب کی علامتیں ج (۱) اور ج (۱) کے پھر مختلف
 ہوں گیں فی الحقیقت مساوات ج (۱) = کی ایک قیمت درمیان ۱ = ۱ اور ۱ = ب
 کے ہوتی ہی پس ج (۱) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہنچنی چاہی یا بالعکس کے درمیان ۱ = ۱ اور
 ۱ = ب کی پس ج (۱) کا مثبت سی منفی کی طرف جاتا یا بالعکس اسکی درمیان ۱ = ۱
 اور ۱ = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹریم کی جملوں کی سلسلہ کی کل تعداد
 تغیرات علامت میں کچھ تبدیل نہیں کر سکتا یہ ہم ثابت کر دیا مگر سلسلہ میں جو تقسیم علامت
 + اور - کی ہی اس میں وہ تبدیل پیدا کرتا ہی اور سی یہ بات ممکن ہی کہ جب لازماً زیادہ
 ہو کہ ۱ پر اپنی نوبت پہنچانی ہی ایک تغیر علامت کو کم کری تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت کم ہو گا
 جب لاکھ نوبت زیادہ ہو کہ ب پر پہنچنی
 اس دفعہ سٹریم حسب کی اثبات ضابطہ میں کسی امر زیادہ نہیں ہوتا فقط اوسطی لکھ لکھ کے ادا اس باب
 میں ہوتی ہی کہ جس طرح تغیرات علامت کم ہوتے ہیں
 (۱۵۷) سٹریم کی جملوں کی سلسلہ میں تغیرات علامت کی تعداد گنی میں یہ ہو سکتا ہی کہ قیمت لاکھ
 جس پر ہم بحث کر رہی ستان جملوں میں سی کسی کو فنا کردی تو اس بات کا خیال کرنا چاہی کہ ہم کو
 علامتیں یا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کریں کیونکہ علامتیں اسکی باقبل اور بعد جملوں ضرور
 مخالف ہوتے ہیں

(۱۵۷) مساوات ج (۱) = کی تمام حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لاکھ ص
 اور ہر + ص سٹریم کی جملوں میں رکھو پس اول صورت میں جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی
 اسکو جب قدر از زیادہ دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حاصل ہوگا اسقدر تعداد

ساوات کی کل حقیقی قیمتوں کی ہوگی جب لا برابر $+ ص ۵ - ص ۵$ کی کیا جائے تو جملوں میں ہی
 ہر ایک جملہ کی ہی علامت ہوگی جو لا کی اعلیٰ قوت کی علامت اور سب جملہ میں ہو
 (۱۹۸) فرض کرو کہ $ح (لا)$ کی مدد سے کون تعبیر کریں تو تعداد مستعان جملوں $ح (لا)$ و $ح (لا)$ ۔
 اکثر ان ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ماقبل کی ہوگی پس یہ ہم فرض کر سکیں گے
 کہ $ح (لا)$ کا درجہ ہی وہی تعداد مستعان جملوں کی ہی اور $ح (لا)$ میں جو اعلیٰ قوت لاکہ ہے
 اس کی مثال مثبت میں **اول** اگر کل مستعان جملوں کی **اول** رقموں کی مثبت مثال ہو تو مساوات $ح (لا) =$ ۔
 کی تمام قیمتیں حقیقی ہوں گیں اس واسطے کہ سٹریم کی جملی مثبت ہوگی جب $لا = + ص ۵$ کے ہو
 اور وہ علیٰ التبادل مثبت اور منفی ہوں گیں جب $لا = - ص ۵$ پس ان تغیرات علامت
 کم ہوئی گئے جب لاکہ **نوبت**۔ $ص ۵ سی + ص ۵$ تک پہنچی
دوم اگر **اول** رقموں کی سب جملوں میں مثال مثبت نہ ہوں تو خیالی قیمتوں کے زوج اونٹنی ہی ہو
 جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہوگی ہر تغیر کی واسطی ایک زوج ہوگا
 فرض کرو کہ ان مثال کی سلسلہ میں **م** تغیرات علامت اور **ن** مساوات علامت ہیں
 پس جب $لا = + ص ۵$ تو **م** تغیرات علامت اور **ن** مساوات علامت سٹریم کی جملوں میں ہیں
 اب لاکہ $+ ص ۵ سی - ص ۵$ میں بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہ تو اتراٹ علامت ہو جائیں گی اور
 تو اتراٹ علامت کی جگہ تغیرات علامت ہو جائیں گی پس جب $لا = - ص ۵$ تو **ن** مساوات علامت
 اس واسطے تغیرات علامت کی تعداد جب $لا = - ص ۵$ کی اور تغیرات علامت کی تعداد $سی$ کہ $لا = + ص ۵$ کے
 بقدر **ن**۔ ۲ کے زیادہ ہوگی اور **ن**۔ ۲ حقیقی قیمتیں مساوات $ح (لا) =$ ۔ کی ہوں گیں
 اور اس واسطے ۲ م خیالی قیمتوں کی تعداد ہوگی
 اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتوں کی حقیقی ہونے کی لکھی ہوئی ضرورت ہے کہ کل مستعان
 جملوں کی **اول** رقموں کی مثال ایک ہی علامت رکھیں
 (۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملوں کی اندر **م** کو یہ درجہ مثبت ہو کہ $ح (لا)$ کی مثال نہیں ملے گی

پس (لا - ا - ع) اور (لا - ب - ج) - ۱ - وفی اعظم ح (لا) اور ح (لا) کا ہوگا
 اور یہ جملہ تمام مستعان جملوں ح ۲ (لا) وح ۳ (لا) - ۰ ح (لا) کو جو دفعہ ۱۹ میں
 لکھی ہیں تقسیم کر لگا

اب فرض کرو کہ $ح = (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) (لا - د) \dots$

ح (لا) = ع (لا - ب) (لا - س) (لا - د) .

+ ق (لا - ا) (لا - س) (لا - د) . . .

+ (لا - ا) (لا - ب) (لا - د) . . .

توج (لا) اول جملہ مشتق $ح (لا)$ کا نہیں ہے اس واسطے کہ

اگر $ع = ا$ اور $ق = ا$ ہو تو ہی جو $ح (لا)$ ہو جائیگا وہی جملہ مشتق ہوگا لیکن جب $لا = ا$

یا $ب$ یا $س$ وغیرہ کے ہو تو $ح (لا)$ کی اور $ح (لا)$ کی اول جملہ مشتق کی ایک ہی علامت ہوتی ہے

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۰ کے ہم مساوات $ح (لا) =$ کی حقیقی قیمتوں کا

صح (لا) اور $ح (لا)$ کو اول دو جملی سٹرم کی بنا کر اونسوی اور باقی حاصل کر کے فیصدہ

سٹرم کی جملوں کا سلسلہ جو $ح (لا)$ اور $ح (لا)$ سی حاصل ہوتا ہے وہ اس سلسلہ کی

کہ $ح (لا)$ اور $ح (لا)$ سی حاصل ہوتا ہے اس سبب سے فرق کہتا ہے کہ اسکی ہر رقم میں ایک

جز ضربی زائد (لا - ا - ع) - ۱ - (لا - ب - ج) - ۱ - ہے

پس جب کوئی قیمت لا کی لگائیں تو پہلی سلسلہ کی رقموں کی علامتیں یہی ہونگی جو

دوسرے سلسلہ کی رقموں کی ہیں یا اسکی بالکل بالعکس ہونگی \therefore تعداد تغیرات علامتوں کی وہی ہے

اسی معلوم ہوا کہ سٹرم کی جملوں کی سلسلہ کی امتحان کرنی سی ہم کو یہ بات دریافت ہو سکتی ہے

کہ مساوات $ح (لا) =$ کی کتنی قیمتیں حدود معینہ میں واقع ہیں یعنی مساوات $ح (لا) =$ کی

قیمتیں جدا جدا مفصل اول حدود میں دریافت ہو جاتی ہیں

پس یہ کچھ ضرور نہیں کہ سٹریم کی ترکیب پہلے ہم مساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں ہیں بلکہ جب سٹریم کی جملوں کا حساب لگا چکے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگر وہ ہوں گے اطلاع اس سبب ہو جائیگی کہ افونکی موجود ہونی کی صورت میں باقی اخراج ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سے کہ مستعان جملی حاصل ہوتی ہیں او سکی اندر بعد اول جملی کی حاصل ہونے کے مثل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد میں ضرب دیجاتی ہیں یا کسی مثبت عدد پر تقسیم کر جاتی ہیں اور اسی کچھ فرق عمل میں نہیں آتا اسلی کہ مستعان جملی مثبت اعداد کی ضرب تقسیم ہی علامتوں میں اپنی تبدیل نہیں ہوتے

سٹریم حساب کے ضابطہ سی ہم مساوات مفروضہ کی تحقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کر سکتے ہیں سٹریم کی جملوں کی سلسلہ میں لاکھ متواتر اعداد صحاح مندرج کریں تو اوسے ہم دریافت ہوگا کہ کونسی دو متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتیں واقع ہیں اور اگر ہم دریا ہو کہ دو اعداد معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتیں واقع ہیں تو ہر دون اعداد صحاح کی بائیں خوا اعداد کمزور واقع ہوں او نکو سجائی لاکھ مندرج کرنی جاتی ہیں جب تک کہ آخر کو ہم یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت کل دو عددوں کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالیں حل کرتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ ج (۷) = ۷۳ - ۷۲ - ۷۱ + ۱۳}$$

$$\text{یہاں ج (۷) = ۷۳ - ۷۴ - ۷۵}$$

$$\text{ج (۷) = ۷۲ - ۵}$$

$$\text{ج (۷) = ۱ +}$$

بموجب دفعہ ۱۴۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اس سلسلہ علامتوں کا لاکھ قیمتوں کے واقع ہوں گے

ج (۷)	ج (۷)	ج (۷)	ج (۷)
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

بیان جب کہ لا = ۲ کی ہو تو دو تغیر علامت ہیں اور جب لا = ۳ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں ہوتا
اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتیں ۱۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہیں اور کوئی اور مثبت قیمت نہیں ہے
اور یہی دریا ہوتا ہی کہ جب لا = ۳ ہو تو علامات متواترہ بہ ہوتی ہیں - + - + - + اور جب لا = ۴

تو وہ - + - + اس کا ایک تغیر علامت - ۳ سی - ۲ پر نو بت پہونچتی سی کم ہوتا ہے
اسوٹے منفی قیمت - ۱۲ اور - ۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتوں کی جدا جدا کرنے کے
لئے ہم کو ۱۲ اور ۳ کے مابین اعداد کو لایں جگہ رکھنا چاہیے مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ رکھیں
تو علامات متواترہ بہ ہوتی ہیں - + - + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے

خواہ - کو + یا - خیال کریں پس سی ۲ پر نو بت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کم ہوتا ہے
اسوٹے ایک قیمت ۱۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہے

اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی

اب پہ فرض کرو کہ ج (لا) = لا - ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا - ۷ = -

بیان ج (لا) = لا - ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا - ۷ جزئی ۲ کو ساقط کر دیا ہی

$$ج (لا) = لا - ۴ لا + ۵ لا - ۵$$

$$ج (لا) = لا - ۵ لا + ۲ لا - ۵$$

$$ج (لا) = لا +$$

اس مثال میں ج (لا) کا حساب لگانا پیچیدگی خیالی نہیں مگر تاکہ مطلب برآ کر کو نقطہ تہنیت جانسی کہ
کہ علامت کیا ہی ہیں جب ہم کو یہ تحقیق ہو گیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اس کا حساب ٹھیک ٹھیک نہیں کر سکتی اور صرف

$$ج (لا) = لا +$$

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں

لا کی قیمتوں کے موافق سلسلہ علامات یہ ہے

ج (لا)	ج (لا)	ج (لا)	ج (لا)	ج (لا)
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+
+	-	+	-	+

۲- اور ۱- کے درمیان ایک اور ۰ اور ۱ کی درمیان ایک تغیر علامت گم ہو تھی اور ۳ اور ۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہیں

اگر ہم ۳ بجای لا کی رکھیں تو علامات متواترہ - + + حاصل ہوتی ہیں ان میں ایک تغیر علامت ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۳ اور ۳ کی درمیان واقع ہوتی ہیں اور ۳ اور ۳ کے مابین ۳ اور ۴ کو درمیان واقع ہوتی ہے
 ان پیرض کرو کہ ج (لا) = ۲ - ۳ + ۳ - ۱۱ + ۱۰ - ۱۹ = ۰

بیان ج (لا) = ۴ - ۳ + ۳ - ۵ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

ج (لا) = ۱۳ - ۱۵ + ۱۸ = ۱۶

ایک بادی انظر میں معلوم ہوتی ہے کہ مساوات ج (لا) = کی خیالی قیمتیں ہیں ج (لا) کہیں کسی لا کی حقیقی قیمت سے معلوم نہیں ہو سکتا سو اعلیٰ بموجب دفعہ ۱۹ کی مثال میں شرم صبا کی زیادہ قیمتوں کی دریافت کرنی کی ضرورت نہیں ہے جب لا = صہ تو علامات متواترہ - + + اور جب لا = صہ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہیں اور حقیقی قیمتوں میں سے ایک مثبت اور دوسرے منفی بموجب دفعہ ۲۱ کے ہے

پندرہواں باب فوریر کا ضابطہ

(۲۰۴) جس سوال کی حل کرنی میں دوسو برس ہی اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہی تھیں وہ شرم صبا کی ضابطہ سے تمام اور کمال حل ہو گیا یہ ضابطہ پیرس میں ۱۸۳۵ء میں ایک کتاب میں منطبع ہوا شرم صبا سے پہلی جن مہندسین نے اس سوال کی حل کرنی میں توجہ اور کوشش کی ان میں سے لودن صبا اور فوریر صبا کا حال قابلِ لکھنی کے ہے

ان دو نو مہندسین کی ترکیبیں ایک سلسلہ سی نکلتی ہیں اور اس سلسلہ کا موجد اعلیٰ انگلستان کے نزدیک فوریر حصہ ہیں اور اہل فرانس کے نزدیک بوڈن اور فوریر دونوں کو اس سلسلہ کا توار دہو مسائل معادلات کا باب میں کتاب فوریر کی سلسلہ میں منطبع ہوئی اور بوڈن کی کتاب اسی باب میں سلسلہ میں منطبع ہوئی مگر اس کی شہادت موجود ہے کہ فوریر نے اپنی اس سلسلہ کو طالب علموں کے روبرو دیکھ کر بوڈن کی کتاب کے مطابق پہلی بیان کیا تھا اب ہم اس سلسلہ کو ثابت کرتے ہیں

(۲۰۵) فوریر حصہ کا ضابطہ فرض کرو کہ ح (لا) جملہ جبریت درجہ کا ہو اور

ح (لا) اور ح م (لا) ح ۰۰۰ (لا) جملہ مشتقہ جملہ ح (لا) کی ہوں اور سہ کوئی ہی مقدار ہو اور سہ دوسری مقدار اسی بڑی جبریت مقابلہ کی اعتبار سے ہو تو مساوات ح (لا) = کی اصلی قیمتیں سہ اور سہ کی درمیان بڑی اوس از دیادی نہیں ہو سکتیں جو تعداد تغیرات علامت سلسلہ ح (لا) وح (لا) وح م (لا) ح ۰۰ (لا) کو جب لا = سہ کے ہو

اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = سہ کے ہو ہم اس تمام سلسلہ ح (لا) وح (لا) وح م (لا) ح ۰۰۰ (لا) کو فوریر کے جملہ کہیں گے فوریر کے جملوں میں ہی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہیں واقع ہو گا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر

پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کر دی اب چار صورتیں بحث طلب ہیں

اول فرض کرو کہ لا = س کی ح (لا) کو معدوم کرنا ہی اور ح (لا) معدوم نہیں ہوتا اب لا کی جگہ س - سہ رکھو اور سہ ایک مثبت مقدار ہی تو سہ کو اب چھوٹا فرض کر سکتی ہیں کہ علاقہ ح (س - سہ) کی وہی ہو جو - سہ ح (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۲ کے

علامت ح (س - سہ) کی وہی ہی جو ح (س) کی چلیں اگر لا = س - سہ اور سہ کافی چھوٹا فرض کیا جاوے تو ح (لا) اور ح (لا) کی مختلف علامتیں ہونگین

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر لا = س + سہ اور سہ چھوٹا کافی مقرر کیا جاوے تو ح (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوری کے جملوں میں دو
تغییرات علامت کم ہونگی اور جب لا کی نوبت برہ کر س پر پہنچے اور اگر
ج-۱+ (س) اور ج-۱+ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو فوری کے جملوں میں نہ تو
علامت کم ہوتا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہاں فرض کرو کہ جب لا = س تو کئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہیں مثلاً جب لا = س
تو فرض کرو کہ جملی ج-۱ (لا) و ج-۱+ (لا) و ج-۱+ (لا) معدوم ہوتے ہیں اور
اور ج-۱+ (لا) اور ج-۱+ (لا) معدوم نہیں ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو
اور صہ کو مثبت اور چوٹا کافی مقرر کرو تو نتائج مفصلہ ذیل بلحاظ م+ ۱۲ ارقام
ج-۱ (لا) و ج-۱ (لا) ج-۱+ (لا) و ج-۱+ (لا) کے حاصل ہونگے
(۱) فرض کرو کہ م جفت ہی اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں
جب لا = س - صہ کے ہوم تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کی ہو تو کوئی تغیر
علامت واقع ہوگا اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو ارقام میں
جب لا = س - صہ کی ہوم + تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کے ہو
تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس بربر کی جملوں میں دو صورتوں کی اندر جب لا کی نوبت پہنچی
م تغیرات علامت کم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو
تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہوم + تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب
لا = س + صہ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا پس فوری کے جملوں میں جب لا کی برہ کر نوبت
س پر پہنچی ہی تو م + تغیرات علامت کم ہوتی ہیں اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی علامتیں مختلف ہوں
تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہوم تغیرات علامت اور جب لا = س + صہ کے ہو تو
ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی برہ کر نوبت س پر پہنچی ہی تو فوری کے

جملے م - ۱۔ تغیرات علامت کو کم کرتے ہیں
 المختصر یہ ہے کہ فوریر کے کبھی تغیر علامت حاصل نہیں کرتی بلکہ جب لاکھی سرہ کو نو بت میں پر
 کہ ایک قیمت مساوات ح (لا) = کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت کم ہو جاتا ہے
 پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۵-۲۰ میں جو دعویٰ ہم فی سانی کی واسطی بیان کیا تھا وہ ثابت ہوا اور اس
 علاوہ اور باتیں بھی ثابت ہیں ہم فی او کو اس سبب سے دفعہ ۲۰۵ میں نہیں بیان کیا تھا کہ رفت
 نہ واقع ہو یہ ظاہر ہے کہ جب فوریر کے جملوں کی تغیرات علامت کی تعداد میں تبدل واقع ہوتا ہے
 یا مستثنا اس وجہ کی جواز دیا غیر مقررہ ہی مساوات معلوم کی قیمت پر نو بت پہونچتی ہی قیمت تعداد
 تغیرات علامت کی کم ہوتی ہی حاصل اگر متواتر ہو اور اسی بڑا عدد وہ فوریر کے جملوں میں مندرج
 کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریر کے جملوں میں کوئی تغیر علامت کم نہیں ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی سہ اور صہ
 کے درمیان نہیں واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریر کے جملوں میں طاق تعداد تغیرات علامت کی کم ہوتی ہی تو ہی ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے
 کہ قیمتیں مساوات کی جنگی تعداد طاق ہو سہ اور صہ کی درمیان واقع ہیں لیکن ہم یہ نہیں کہہ سکتے وہ
 کوئی طاق تعداد ہی الا اس صورت میں کہ ایک تغیر علامت کم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت

(۳) فرض کرو کہ فوریر کے جملوں میں جفت تعداد تغیرات علامت کی کم ہوتی ہی تو ہی ہم یہ نتیجہ
 نکال سکتے ہیں کہ کیا تو کوئی قیمت سہ اور صہ کی درمیان نہیں واقع ہی اور اگر واقع ہیں تو جفت تعداد کوئی
 (۲۰۷) فوریر کے ضابطہ میں یہہ اک فائدہ ہے کہ اس کا استعمال سانی ہی ہو سکتا ہے کیونکہ جملہ

معلوم کی جملی مشتقہ سانی ہی دریافت ہو جاتی ہیں مگر یہ نقصان ہی ہے کہ اس میں امتحان لا تعداد
 کرنی پڑتی ہیں اگر قیمتیں بہت قریب ہوں تو او انکی یوں کے جنگی اندر وہ واقع ہوتی ہیں
 بہت سی چوٹی چوٹی صی کرنی پڑتی ہیں تاکہ وہ کی قیمتیں خیالی قیمتوں ہو جاوے اور اس کی ہی ضرورت پڑتی ہے

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی پہلی اس بات کا امتحان کریں کہ مساوات برابر قیمتیں رکھتی
ہی یا نہیں اگر ایسا نہ کرینگے تو مکرر قیمتوں کی قیمت تعداد ہم کو معلوم نہیں ہوگی
(۲۰۸) ہوڈن اور فوریر دونوں ترکیبیں بون مشتبہ کی امتحان کرنی کی لکھی ہیں تاکہ یہ بات ظاہر ہو جائے کہ
قیمتیں مساوات مفروضہ کی اوس بلوں کی اندر واقع نہیں یا نہیں لیکن ان ترکیبوں کا بیان کرنا اس مقام پر
اسلئے کہ سٹریم کی ضابطہ سی مطلب یعنی حاصل ہو جاتا ہی اور اس میں کچھ دقت بھی نہیں پڑتی ہے
(۲۰۹) یہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر دس کارٹس کے علامتوں کا یہی قاعدہ داخل ہے
فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات کامل ہے

اگر لا = فوریر کے جملوں میں رکھیں تو علامتیں وہی ہونگیں جو جملہ ح (لا) میں بائیں
طرف سی دائیں طرف نہیں اور اگر ہم لا = ح کے فوریر کے جملوں میں رکھیں تو
علامتیں سب مثبت ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) =
کی مثبت قیمتیں زیادہ تعداد میں ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہیں رکھ سکتی
اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکھ کر اوکی مثال صفر بنا کر لکھ دو اور ان
مثال پر علامتیں ایسی لگ سکتی ہیں کہ فوریر کی جملوں میں تغیرات علامت کی اوس حالت میں
کہ ان ارقام کا بھی شمار ہوا دینی ہی تعداد ہو جاتی کہ بغیر قیمتوں کی تعداد تغیرات علامت تہی
قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتوں سے متعلق ہی وہ اوس جز سی کہ مثبت قیمتوں سے متعلق ہے
مستط ہو سکتا ہے دفعہ ۴۳ دیکھو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن حسب کے
ہی وہ بھی فوریر کی ضابطہ میں داخل ہی دفعہ ۴۵ دیکھو اسلئے کہ اگر ح (لا) = مساوات ہو
تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو ح کی قیمت ایسی دینا کرنی چاہی کہ جب لا = ح تو فوریر کے جملہ
تمام مثبت ہوں پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت دریا لا = ح اور لا = ح
کے نہیں ہوگی

سولہواں باب لاگر انٹر کی ترکیب

(۲۱۱) ہم فی ابھی بیان کیا ہی کہ قیمتیں ناطقہ محدود کن ترکیبوں سی دریافت ہوتی ہیں اب ہم بیان کرتے ہیں کہ مساوات کی حقیقی صم قیمتوں کی قدر عددی تقریباً کر حسابوں سی دریافت ہوتے ہیں

سٹریم حساب کی ضابطہ سی ابھی بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہو سکتی ہی کہ کتنی قیمتیں ایک یون معلوم میں واقع ہو سکتی ہیں اور پھر ہم اس یون معلوم کو ایسی چھوٹی چھوٹی یون میں تقسیم کر سکتی ہیں کہ جنکی درمیان میں جدا جدا ہر قیمت واقع ہو فرض کرو کہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقدار معلوم سے اور صد کے درمیان واقع ہی اب ہم یہ دریافت کرنا چاہتی ہیں کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا ہے اور صد کے درمیان ایک مقدار لرو اور اسکو بجای لا کے ج (لا) میں رکھو تو ج (لر) کی علامت سی ہم کو یہ بات معلوم ہو جائیگی کہ قیمت سے اور لر کے درمیان واقع ہے یا لر اور صد کے درمیان فرض کرو کہ وہ سے اور لر کے باہر واقع ہی تو پھر بجای لا کے ہم ایک مقدار در جو باہر سے اور لر کے واقع ہو رکھیں گی اور ج (در) کے علامت سی ابھی دریافت کرینگے کہ قیمت سے اور لر کے درمیان واقع ہی یا سے اور لر کے بیچ میں واقع ہی اب اسی عمل جاری رکھیں جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو خاطر خواہ حاصل ہو عمل میں جس یون کے درمیان قیمت واقع ہوگی اسکی تصنیف ہوتی جائینگے

جو عمل یہاں ہم بیان کیا اوس میں مشقت شاقہ اوٹھانی پڑتی ہی اور بڑا طویل عمل کرنا پڑتا ہے اسلی ترکیبیں ایجاد ہوئیں ہیں جنسی کہ عمل مختصر ہو جاتا ہی اونہیں سی اول ہم لاگر انٹر کی ترکیب بیان کرتے ہیں

(۲۱۲) فرض کرو کہ لا = مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہ معلوم ہی کہ اوسکی صرف ایک قیمت دو مثبت صحیح متصلہ اور لا کی درمیان واقع ہی لا = ۱ + ۱/۲ کی رکھو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ میں مندرج کرو تو ج (۱ + ۱/۲) = اب اگر اس مساوات کو کسی خالص کرین تو ایک مساوات دکی اوسی درجہ کی حاصل ہو جائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تھی اسکو ج (د) =

لاگراثر کی ترکیب تقریب

۳۷

باشا نزد ہم

تعبیر کرو یہ مساوات کی صرف ایک قیمت ثابت ہوگی کیونکہ اصل مساوات میں لائی ایک قیمت
 ۱ اور ۱ + ایک درمیان واقع ہے اب ہم صحیح متصلہ ۱ و ۲ و ۳ کو مح (د) میں بجای کر
 رکھ رکھ کر یہ دریا کریم کہ وہ کوئی دو نتائج متصلہ ہیں کہ جنکی علامتیں مختلف ہیں فرض کرو کہ یہ
 دو نتیجے ب اور ب + حاصل ہوئے جنکی درمیان واقع ہے = ب + لچ کی مقرر کرو اور
 اسکو بجای کر لے کر توج (ب + لچ) = ۰ تو موافق سابق کی یہاں بھی ایک مساوات
 حاصل ہوگی جسکی مقدار چھوٹی قیمت ایک ہی ثابت ہوگی اور ہم صحیح متصلہ س اور س + اسی تحقیق
 کر سکتے ہیں جنکی درمیان قیمت ہی کی واقع ہو

پس ی = س + ۱ مقرر کرو اور علیٰ ہذا القیاس

پس لائی قیمت خاطر خواہ تقریباً اس مسلسل کے صورت میں دریافت ہو جائیگی

$$۱ = ۱ + \frac{۱}{س} + \frac{۱}{س^۲} + \dots$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتیں درمیان صحیح ۱ اور ۱ + کے درمیان
 سترم صاب کی ضابطہ کی موافق با بعض اور قیمتوں کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سی یہ تحقیق
 کر سکتے ہیں کہ مساوات کی قیمتوں کو جو اون دو صحیح متصلہ کی درمیان واقع ہیں کس عدد میں
 ضرب دین کے حاصل ضرب بھی حاصل ہوں کہ وہ مختلف صحیح متصلہ کی درمیان واقع ہوں
 اب مساوات کی بہت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اسکی قیمتیں مساوات مفروضہ
 کی قیمتوں کی ضعات موافق اس عدد حاصل کی ہوں یعنی اس مساوات قیمتیں برابر مساوات مفروضہ
 کی قیمتوں اور اس عدد کے حاصل ضرب کے ہوں اور پھر اس بدلی ہوئی مساوات پر موافق دفعہ
 گذشتہ کے عمل کرو

یہ دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی بہت بدلتی کی کام میں لائیں اس حالت میں مساوات کی
 ایک سی زیادہ قیمتیں ہوں گیں یہ قیمتیں میں سب بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کریں
 اور یہ جدا جدا حساب ہی کی مختلف قیمتوں کی لگائیں یہ بھی ہو سکتا ہے کہ مساوات کی

ایک سی زیادہ قیمتیں خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہوں تو مساوات سی سے اون کے اندر تمیز پیدا کرو اور پہر ایک قیمت کا حساب جاری رکھو اور یہی عمل کئی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (لا) = سی ح (۱ + $\frac{1}{2}$) = کے حاصل کرو

یعنی ح (لا) کون درجہ کا فرض کر کے یہہ حاصل کرو کہ

ح (۱) + $\frac{1}{2}$ ح (۱) + $\frac{1}{3}$ ح (۱) + $\frac{1}{4}$ ح (۱) + ... + $\frac{1}{n}$ ح (۱) =

ن میں ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ن ح (۱) + \frac{1}{2} ن - ح (۱) + \frac{1}{3} ن - ح (۱) + \frac{1}{4} ن - ح (۱) + ... + \frac{1}{n} ن - ح (۱) =$$

پس مساوات کی بنانی کی واسطی عدد قیمتیں ح (۱) اور ح (۱) اور ح (۱) ... دریافت کرنی چاہی اور ان عدد قیمتوں کا حساب موافق دفعہ کی ہو سکتا ہی مگر دفعہ لائین جو ہم فی بیان کیا ہی کہ ایسی ہوں کی کرنی کی ترکیب ہو نہر حساب کی ترکیب کے باب میں بیان ہوگی وہی بہان ہم بیان کرتی ہیں اور یہی کیفیت مساوات سی کی بنی کی ہے

دفعات ۵ اور ۵ پر رجوع کرنی سی لاگرانژ کی ترکیب تقریب اس طرح بیان ہو سکتی ہے کہ فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ۱ اور ۱ + کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتیں بقدر ۱ کے گٹاؤ اور پہر مساوات متکافہ اسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب + ۱ کے درمیان دریافت کرو اور قیمتوں کو بقدر ب کی گٹاؤ اور مساوات متکافہ بناؤ

اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س + ۱ کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتوں کو بقدر س کی گٹاؤ اور مساوات متکافہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہہ کسر متسلسل

$$۱ + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{س} + ...$$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

$$(۲۱۵) مثال ۱ - ۲ - ۵ =$$

دفعہ ۸ - کے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور جو جب دفعہ ۲۰ کی یہہ قیمت ثبت مقدار ہوگی

لاگرانژ کی ترکیب تقریب

۱۳۶

بایستہ نذر ہم

اور امتحان ہی معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۱۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے
فرض کرو کہ $1 = 2 + \frac{1}{3}$ تو

$$1 - = 5 - 2 \times 2 - 3 = (2) \text{ ح}$$

$$1 - = 2 - 2 \times 3 = (2) \text{ ح}$$

$$4 = 2 \times 3 = (2) \text{ ح} \frac{1}{3}$$

پس مساوات کی $-3 + 10 + 4 + 1 = 0$ یعنی

$$-3 - 10 - 4 - 1 = 0 \text{ اب اسکو صحیح (د) = کہو}$$

یہاں $د = 10$ کے صحیح (د) کو منفی اور $د = 11$ صحیح (د) کو مثبت بنانا ہی اس واسطے قیمت مطلوب
کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی $د = 10 + \frac{1}{3}$ کے فرض کرد تو

$$41 - = 1 - 10 \times 4 - 2 \times 10 = (10) \text{ ح}$$

$$49 = 4 - 10 \times 2 - 2 \times 3 = (10) \text{ ح}$$

$$20 = 10 - 10 \times 3 = (10) \text{ ح} \frac{1}{3}$$

اور مساوات کی $-41 + 49 + 20 + 1 = 0$ یعنی

$$41 - 49 - 20 - 1 = 0 \text{ اب اسکو صحیح (د) = سی تعبیر کرو}$$

یہاں $د = 2$ کے صحیح (د) کو مثبت بنانا ہی پس قیمت مطلوب سی کی ۱۱ اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے
فرض کرو کہ $1 = 1 + \frac{1}{3}$ تو

$$59 - = 1 - 1 \times 20 - 2 \times 49 = (1) \text{ صحیح}$$

$$25 - = 20 - 1 \times 188 - 2 \times 143 = (1) \text{ صحیح}$$

$$89 = 49 - 1 \times 183 = (1) \text{ صحیح} \frac{1}{3}$$

مساوات کی $-59 + 25 + 89 + 1 = 0$ یعنی

$$-59 + 25 + 89 + 1 = 0$$

بیشا تزدہم
 اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ دکی قیمت اور ۲ کے درمیان واقع ہے پہلی مساوات کی عمل کرو

$$۲ = ۱ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \text{وغیرہ}$$

پس مسلسل کے مقربین $\frac{۲}{۱}$ و $\frac{۲۳}{۱۱}$ و $\frac{۲۴۷}{۱۱۱}$... میں جبرہ مقابلہ کا چوالیسواں باب دیکھو
 $\frac{۲۴۷}{۱۱۱}$ اور قیمت کی اصل قدر میں فرق کم بہ نسبت $\frac{۱}{۲۱(۱+۱۱)}$ یعنی کم بہ نسبت $\frac{۱}{۶۷۲}$ کے ہے
 ایک اور مثال کی واسطی یہ مساوات $۴ = ۳ + ۱ = ۴ + ۰$ - لو بہ موجب دفعہ ۱۰۸ کے مساوات کے
 تمام اصلی قیمتیں ہیں اور بموجب شرط حسب کی ضابطہ کی یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ایک قیمت درمیان
 اور $\frac{۱}{۱}$ کی واقع ہے اور دوسری قیمت $\frac{۱}{۱}$ اور ۲ کے درمیان اس واسطی اگر $۱ = \frac{۱}{۱}$ کے لکھتے ہیں
 اور مساوات لاکے بنائیں تو مساوات کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۴ کے
 درمیان واقع ہوگی اور مساوات لاکے یہ ہے $(\frac{۱}{۱}) - ۲ = ۱ + ۰ = ۰$

$$\text{یعنی } ۲۸ - ۱۱ = ۵۶ + ۰ =$$

قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے یہ ہوگی کہ

$$۲ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \text{وغیرہ}$$

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

$$۳ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \text{وغیرہ}$$

ان قیمتوں میں ہر ایک قیمت کے نصف کرنی سے اصل مساوات کی قیمتیں دریافت ہو جائیگی
 یا ہم لاگراسٹر کی ترکیب اصل مساوات پر کام میں لائیں اور مساوات کی بہت کو ابتداً تبدیل نہ کریں
 فرض کرو کہ $۱ = ۱ + \frac{۱}{۲}$ تو $(\frac{۱}{۲}) - ۲ = ۱ + (\frac{۱}{۲}) = ۰$ - اسے یہ حاصل ہوگا کہ
 $۳ - ۲ = ۱ + ۵۳ + ۱ = ۰$ اس کو (۵) سے تعبیر کرو

یہاں (۱) مثبت ہے اور (۲) منفی اور (۳) مثبت ہے پس ایک قیمت مثبت دکی اور ۲ کے

باشا نذرہم لاگرانژی ترکیب تقرب

۱۳۸

درمیان اور دوسری قیمت ۲ اور ۳ کی دریا واقع ہوگی تو $1 + \frac{1}{2}$ کی
اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور $2 + \frac{1}{2}$ کی دوسری قیمت کو تقریباً
دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو

مسوا۳ - لا - لا + لا = کی ایک منفی قیمت ہی اسکو اسطرح دریافت کر سکتی ہیں کہ لاکو - لاکو
بدل دو اور مساوات مستحصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

$$(- لا) ۳ - لا - لا + لا = ۰ کا$$

چونکہ مساوات لا - لا + لا = ۰ کی تینوں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتوں

کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بھی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۴) اگر لاگرانژی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اسکی قیمت ایک صحیح عدد ہو

تو اصل مساوات کی ہم کو ایک قیمت کے مسلسل محدود میں دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت مکسور

محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتیں محدود اور ناطق مکسور

یا صحیح تحقیق کرنی ہیں اور انکی موافق اجزاء ضربی مساوات سی مسا قط کر لی ہوتی تو یہ

بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۵) لاگرانژی ترکیب میں بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی

مساوات قابل سی بالکل مطابقت رکھتی ہو تو اس حالت میں خارج قیمت کے مسلسل کے مقرر واقع ہو

اور اس سبب سے مسلسل ایک سر مکرر یا دورہ بن جائیگی اور اسکی قیمت مساوات درجہ دوم

کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکھو

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتوں میں درجہ دوم کا اہم ملحق ہوگا اور جو جب دفعہ ۴۴ کی اس

مساوات کی دونوں قیمتیں مساوات مفروضہ کی ہے دو قیمتیں ہونگی

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ میں جس عمل کو مثلاً مساوات لا - لا + لا = ۰ کی دوسری ترکیب کے اندر

لکھا ہی اسکو ہم یہاں علی العموم لکھتے ہیں

سما را بڑا مطلب ذہن میں یہ ہے کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتیں درمیان صحیح متصلہ کی واقع ہوں تو لاگرانژ کی ترکیب کو عمل میں لائیں فرض کرو کہ $C = 0$ کے مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان C (لا) اور C (لا) اور C (لا) ... سٹریم صاحب کے ضابطہ حال کرو اور وہاں پھر جاؤ جہاں اب مستعان جملہ حاصل ہو گا کہ وہ لا کی سب قیمتوں کی سطح پر واقع دفعہ ۱۴۹ دیکھو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتیں مساوات مفروضہ کی صحیح متصلہ

۱ اور ۱ + کی درمیان واقع ہیں لا کی جگہ ۱ + ۱/۲ جملوں C (لا) اور C (لا) اور C (لا) ... میں رکھو اور جو افکنی صورت ہو اور کو C (د) C (د) اور C (د) ... سی تعبیر کرو اگر جملوں کے دوسرے سلسلہ میں متواتر کوئی سی ایسی دو عدد C اور C + رکھیں تو دونوں صورتوں میں جو تعبیرات علامت ہونگی ان کا تفاوت مساوات C (د) = کی تعداد اور قیمتوں کی ہوگی جو C اور C + کی درمیان واقع ہوں وہ اسکی یہ ہے کہ C (د) اور C (د) اور C (د) ... میں جو C اور C + کی مندرجہ کرنی سی نتائج حاصل ہوتی ہیں وہ وہی ہوتے ہیں جو سلسلہ C (لا) اور C (لا) اور C (لا) ... میں جدا گانہ ۱ + ۱/۲ اور ۱ + ۱/۲ کے

مندرجہ کرنی سی حاصل ہوتی ہیں ہذا سطحی تغیرات علامت کی تعدادوں کا تفاوت برابر مساوات C (لا) = کی تعداد اور قیمتوں کی ہوگا کہ جو ۱ + ۱/۲ اور ۱ + ۱/۲ + کی درمیان واقع ہوں یعنی مساوات C (د) = کی تعداد قیمتوں کی جو C اور C + کی درمیان واقع ہوں

پس اگر ہم کو یہ پتہ ہو کہ C کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں درمیان صحیح متصلہ C اور C + کے واقع ہوں C کی جگہ C + لے سلسلہ C (د) اور C (د) اور C (د) ... میں اور C کی جگہ دو متواتر صحیح متصلہ کی رکھنی سی ہم کو دریافت ہوگا کہ C کی ایک سی زیادہ قیمتیں

دو صحیح متصلہ کے درمیان واقع ہیں یا نہیں اسی طرح عمل کئی جائیگی جب تک کہ ہم کو ایسی قیمتیں حاصل ہوگی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحیح متصلہ

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریباً اور اس پر فوراً کا ضمیمہ

۱۲۰

باب ہفتم

کے واقع ہوں اور جب ہمہ حال ہو جا تو سٹر صاحب کی ضابطہ کے جملوں کی احتیاج نہیں رہی گی اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہو جائیگا پس اس طرح قیمتوں کو جدا جدا کر سکتی ہیں اور اس کا حساب لگا سکتی ہیں اور ان میں سے کسی کو نہیں چھوڑیں اب اگر ہم کو ح (۱) وح (۱) ح (۲) ح (۳) کی قیمتیں دریافت کرنی منظور نہ ہوں بلکہ ان کی علامتیں دریافت کرنی مطلوب ہوں تو ہم صعب رٹوں میں ان جملوں کو د کی ایسی قوتوں میں ضرب دی سکتی ہیں کہ ان کو کسروں ہی خاص کر دین اس واسطی کہ قیمت مقدار ہی فرض کی گئی ہی ہر ایک قوت اس کی مثبت ہی مثلاً بجای ح (۱) کی یعنی بجای ح (۱) + (۱/۲) کے ہم ہمہ لکھیں کہ

$$\text{ح (۱)} + \text{ح (۲)} + \text{ح (۳)} + \dots + \text{ح (۱۰)} + \dots$$

اور ح (۱۰) کو ن درجہ کا فرض کر لیں

باب سترہواں

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریباً اور اس پر فوراً کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقریباً نیوٹن صاحب کی لکھتی ہیں جسی قیمت مساوات کی قدر عددی کا حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ ح (۱۰) = مساوات ہی اور اس کی ایک قیمت خاص حدود سے اور صہ کی درمیان واقع ہی اور ان حدود میں فرق بقدر ایک چھوٹی کسر کے ہی فرض کرو کہ س ایک ایسی مقدار سے اور صہ کی درمیان ہی کہ وہ قیمت مطلوب ہی تقریباً اولین رکھتی ہی اور س + صہ ٹھیک قیمت ہی صہ ایک چھوٹی سی کسر ہی جس کا تشخیص کرنا منظور ہے پس ح (س + صہ) = یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

$$\text{ح (س)} + \text{ح (س + صہ)} + \text{ح (س + ۲صہ)} + \dots + \text{ح (س + ۱۰صہ)} = \dots$$

اب چونکہ صہ ایک چھوٹی سی کسر فرض کی گئی ہی تو صہ اور صہ ۲۰۰۰۰ بمقابلہ صہ کے

نہایت چھوٹی ہوگی پس اگر دوسری قوت اور اسی بڑی قوتوں کو اوپر کی مساوات میں ساقط کر دیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$C(S) + C(S) = 0$$

$$پس \quad C(S) = -C(S)$$

تو یہ فرض کر کے کہ ہم کو اس طرح یہ قیمت $C(S)$ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی ہے $C(S) - C(S)$ ایک تقریب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقریب جدید کو $C(S)$ اسی تعبیر کرو تو موافق سابق کی عمل کرنی ہے $C(S) - C(S)$ ایک اور تقریب جدید حاصل ہوگا اور علیٰ ہذا اقیاس اب ہم اون شرائط کا امتحان کماحقہ کرتی ہیں جنکی موافق یہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص استعمال میں آئی اور ایسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہے کیونکہ اگر $C(S)$ بمقابلہ $C(S)$ کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی $C(S)$ کی ایک چھوٹی کسر نہیں ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا

اوسکا لوازمات سے ہے

(۲۲۰) ایک مساوات یہ نیوٹن حساب کی ترکیب تقریب کا امتحان کرتی ہیں اور یہ مساوات یہی ہے جو خود نیوٹن حساب فی منتخب کی ہے یعنی $3 - 2 - 5 = 0$ کو $C(S) = 0$ سے تعبیر کرو یہاں $3 = 2$ کے $C(S)$ کو منفی اور $5 = 3$ کے $C(S)$ کو مثبت بنانا ہے اسے معلوم ہوا کہ مساوات $C(S) = 0$ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہے اور $2 - 3 = 1$ کے $C(S)$ کو مثبت بنانا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور 3 کی واقع ہوگی اور $2 - 3 = 1$ بھی $C(S)$ کو مثبت بنانا ہی تو قیمت ۲ سی فرق بقدر او کی ہے نہیں رکھتی پس فرض کرو کہ $S = 2$ تو

$$S = 2 - C(S) = S - \frac{S^2 - S^3}{2 - S^3} = S - \frac{S^2 - S^3}{2 - S^3}$$

$$= 2 - \frac{4 - 8}{11} = 2 - \frac{-4}{11} = 2 + \frac{4}{11} = 2.3636$$

$$پس \quad S = 2.3636$$

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہ حاصل ہوگا کہ

$$س - \frac{س}{س} = ۲۸۵۲ - ۰۰۰۰۰۰۰۰ \approx ۲۸۵۲$$

$$س - \frac{س}{س} = ۲۸۵۲ - ۰۰۰۰۰۰۰۰ \approx ۲۸۵۲$$

(۲۲۱) یہ عمل لطریات میں اسان ہی اور علیات میں مشکل نہیں ہی مگر اوسمیں چند احتیاطیں ضرور میں تاکہ کامیابی کا اوسمیں یقین ہو اب ہم اون احتیاطوں کا بیان کرنے میں فرض کرو کہ اس قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور س = س - $\frac{س}{س}$ اب ہم کو یہ یقین بغیر تحقیقات کما حقہ کی نہیں ہو سکتا کہ

کہ س بہ نسبت س کی اصل قیمت سی قرب ہی مثال گذشتہ میں اول ہم فی یہ تحقیق کیا کہ ایک قیمت ۱۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہی اور یہ فرض کیا کہ ۲ تقرب اولیں ہے اور اسی ایک تقرب جدید ۲۰۴۷۴ استخراج کیا لیکن یہ ہم کو تحقیق نہیں ہے کہ ۲۰۴۷۴ بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی اقرب ہی لیکن اگر بجای لا کی اور کے رکھو تو ح (لا) مثبت ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۱۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوا کہ ۲۰۴۷۴ بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی اقرب تر ہی لیکن اب بھی ہم کو یہ نہیں معلوم کہ ۲۰۴۷۴ بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی زیادہ اقرب ہی اگر ہم ۲۰۴۷۴ کو ح (لا) میں کہیں تو ح (لا) مثبت دریافت ہوگا تو اسی یہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲۰۴۷۴ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہی پس ۲۰۴۷۴ بہ نسبت ۲ کے زیادہ اقرب اصل قیمت سی ہے (۲۲۲) فوراً صاحب فی ایک قاعدہ ایسا لکھا ہی کہ اوسکی موافق عمل کرنے سی بیشقت بار بار امتحان کرنی کی نہیں بڑی جیسی کہ اوپر کی مثال میں پڑی تھی اور جب بعض شرائط پور ہو جاتی ہیں تو یہ نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہو جاتی ہے نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضمیر فوراً جملہ معلوم کی اول جملہ شتہ کی ایک خاصیت پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہیں

جبکہ صرف ایک ہی قیمت درمیان سہ اور صہ کی ہو اور فرض کرو کہ $(لا) = ۰$ کے کوئی قیمت درمیان سہ اور صہ کی نہیں ہے اور $(لا) = ۰$ کی بھی کوئی قیمت سہ اور صہ کے باہر نہیں ہے تو اس حالت میں نیوٹن کی ترکیب تقرب ضرور کامیابی کے ساتھ چلیگی اگر اس کا آغاز دہان ہی کریں جہاں $ج (لا) اور ج (لا)$ کی ایک ہی علامت ہو اور پھر اگے اوسکو جاری کریں

ہماری فرضوں سے یہ استخراج ہوتا ہے کہ $ج (لا)$ علامت کو صرف ایک دفعہ سہ اور صہ کے درمیان بدلتا ہے اور $ج (لا) اور ج (لا)$ اپنی علامت سہ اور صہ کے درمیان نہیں بدلتی ہم صہ - سہ کو مثبت فرض کریں گے

(۱) فرض کرو کہ $ج (لا) اور ج (لا)$ کی جب $لا = سہ$ کے ہو ایک ہی علامت ہے یہ تقرباً اولین فرض کرو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقرب ثانی سہ - $ج (سہ) / ج (سہ)$ اور فرض کرو کہ سہ + صہ قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

$ج (سہ + صہ) = ۰$ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہ حاصل ہے کہ $ج (سہ + صہ) - ج (سہ) = صہ ج (لر)$ آئیں لر درمیان سہ اور صہ + صہ کے واقع ہی پس $صہ = ج (سہ) / ج (لر)$ اور ٹھیک قدر قیمت کی سہ - $ج (سہ) / ج (لر)$ ہے پس ہم کو یہ ثابت کرنا ہوا کہ سہ - $ج (سہ) / ج (لر)$ بہ نسبت سہ کے اصلی قیمت سے زیادہ قریب ہے چونکہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی توح $(سہ) اور ج (لر)$ کی مختلف علامتیں ہیں اور $ج (سہ)$ کی وہی علامت ہی جو $ج (سہ)$ کی علامت ہے اور اسی واسطی $ج (لر)$ اور $ج (سہ)$ مختلف علامت ہیں اسی معلوم ہوا کہ $ج (لا)$ تعداداً ایسا کم ہوتا ہے جیسا لا درمیان سہ اور صہ کے زیادہ ہوتا ہے پس $ج (لر)$ تعداداً کم $ج (سہ)$ سے ہوا اسی واسطی - $ج (سہ) / ج (لر)$ ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم بہ نسبت مقدار - $ج (سہ) / ج (لر)$ کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقرب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقریب اولین کے ہے
فرض کرو کہ $ص = ح - \frac{ج (ص)}{ج (ص)}$ توج $(ص)$ اور $ج (ص)$ کی ایک ہی علامت ہے
اور تقریب $ص$ سے جاری ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ $ح (لا)$ اور $ج (لا)$ کی جب $لا = ص$ کے ہو ایک ہی علامت ہے
ص کو تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن حساب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی $ص = ح - \frac{ج (ص)}{ج (ص)}$ ہوگا
فرض کرو کہ $ص + ص$ قیمت کی صحیح صحیح قدر ہی توج $(ص + ص) =$

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے $ح (ص + ص) - ح (ص) = ص$ $ح (لر)$ اسمین لرد در میان
ص اور ص + ص کے واقع ہی پس $ص = ح - \frac{ج (ص)}{ج (لر)}$ پس اب ہم کو بہت ثابت کرنا رہا
کہ $ص - \frac{ج (ص)}{ج (ص)}$ قیمت حقیقی کی زیادہ تر قریب بہ نسبت ص کے ہی چونکہ ص ضرور

منفی ہی توج $(ص)$ اور $ج (لر)$ کی ایک ہی علامت ہی اور $ح (ص)$ کی وہی علامت ہے
جو $ح (ص)$ کی علامت ہی اور $ص$ یا $ح (لر)$ اور $ج (ص)$ کی ایک ہی علامت ہے

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ $ح (لا)$ تعداد ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیسا کہ
لا در میان $ص$ اور $ص$ کی زیادہ ہوتا ہی پس $ح (ص)$ تعداد کم بہ نسبت $ح (ص)$ کے ہوا

اسی واسطی $ح (ص)$ ایک نسبت مقدار ہی اور تعداد چھوٹی بہ نسبت مثبت مقدار $ح (ص)$ کے ہی
اسی ثابت ہوتا ہی کہ نیوٹن حساب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے

قریب تر بہ نسبت تقریب اولین کے ہے

فرض کرو کہ $ص = ح - \frac{ج (ص)}{ج (ص)}$ توج $(ص)$ اور $ج (ص)$ کی ایک ہی علامت
ہی اور تقریب $ص$ سے اگے جاری ہوگا

(۲۲۴) دفعہ گذشتہ سی بخوبی ثابت ہو گیا کہ فورینو بشرط لکھی ہیں وہ نیوٹن حساب کی ترکیب

کی کامیابی کی لگی کافی ہیں جب بشرط پوری ہو جائیں اور اس حدی کہ جب کے موافق
 $ح (لا)$ اور $ج (لا)$ کی ایک ہی علامت ہو تو تقریب شروع ہو کر جاری ہو تو قیمتیں متواترہ حاصل

ہو تب تک جس میں سی ہر ایک قیمت کی اصل قدر تک مستوا تر رہتی ہی بشرطیکہ حدیسی کہ ہم چلی ہیں چوٹی قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گھٹتی ہی اگر حد مذکور بڑی قیمت کی اصل قدر سی ہو اب ہم اختصار کے ساتھ یہ ثابت کریں گے کہ فوریہ کی شرائط کا ہونا ضروری ہے

ایک قیمت مفروضہ سی ہم چلیں تو نیوٹن حساب کا تقرب ثانی $\frac{1}{2}$ (س) زیادہ کر دے اور چلی کر لگا اور قیمت کی قدر حقیقی $\frac{1}{2}$ (س) کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہو کہ $\frac{1}{2}$ (لا) کے استواری علامت ضروری تاکہ ہم ہم کو تحقیق ہو کہ $\frac{1}{2}$ (س) اور $\frac{1}{2}$ (ر) کی ایک ہی علامت ہو اگر ان مقداروں کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوٹن کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑا ہوگا

استواری علامت $\frac{1}{2}$ (لا) کی ضروری تاکہ اسی بہ تحقیق ہو کہ $\frac{1}{2}$ (ر) تعداد کم بہ نسبت $\frac{1}{2}$ (س) کے ہر اگر یہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹن تعداد بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اس طرح صحت کی ہیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم کے درمیان واقع ہوگی اس حالت میں نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر کے بہ نسبت تقرب اول کی ہو سکتا ہی مگر اول کا ہونا کچھ ضروری نہیں

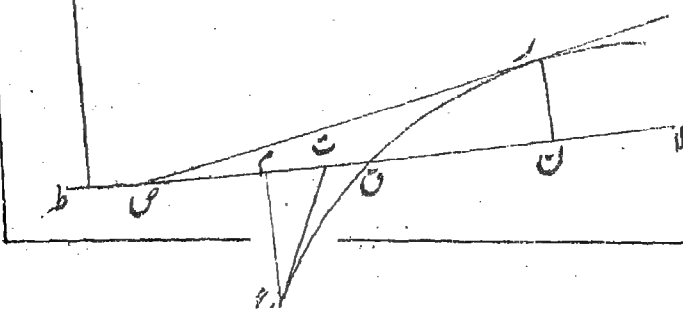
(۲۲۷) دفعہ ۲۲۰ کی مثال میں ثابت ہو سکتا ہی کہ مساوات $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۲ اور ۱

کے درمیان واقع ہی اور مساوات $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ اور $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہیں واقع ہوتی اور جب $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ کے ہو تو $\frac{1}{2}$ (لا) اور $\frac{1}{2}$ (لا) دونوں مثبت ہیں پس نیوٹن کی ترکیب یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اس کا آغاز اور اجراء حدود ۲ سے کریں

ایک اور مثال $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ اور $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہیں واقع ہوتی اور جب $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ کے ہو تو $\frac{1}{2}$ (لا) اور $\frac{1}{2}$ (لا) دونوں مثبت ہیں پس نیوٹن کی ترکیب یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اس کا آغاز اور اجراء حدود ۲ سے کریں

اور $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ کی قیمتیں درمیان ان حدود کی نہیں واقع ہیں اور نیز جب $\frac{1}{2}$ (لا) = ۰ ہو تو $\frac{1}{2}$ (لا) اور $\frac{1}{2}$ (لا) دونوں مثبت ہیں پس اگر حدود اسی آغاز اور

اجرا کریں تو نیوٹن کی ترکیب تقریب سی کا مابین یعنی حاصل ہوگی
 (۲۲۱) اب ہم یہ بتلائینگے کہ سرعت تقریب کا تخمینہ کس طرح ہوتا ہے فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ میں
 ہم کو کسی قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہو تو قیمت کی صحیح قدریں - $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ ہے
 پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ میں $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ ہی اسکو رسی تقریر کرو اور اس سے مابعد
 قدر تقریبی س - $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ اور اب غلطی کی عددی قدر $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) - \frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$
 یعنی $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) - \frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کی ہم کو معلوم ہے کہ $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) - \frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) =$
 $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) - \frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ (لو) ہمیں لو در میان س اور ل کے واقع ہوتا ہے پس غلطی
 $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right) - \frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ ہی اب لو در میان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی در میان واقع ہوتا ہے
 پس س - $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ ہو گا پس غلطی کم بہ نسبت $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ کے ہی اب فرض کرو کہ
 $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ کی سب سے بڑی قیمت جو در میان ان حدود کی ہو وہ سب سے چھوٹی قیمت $\frac{C}{c} \left(\frac{s}{r} \right)$ (لا) تقسیم
 کی جائے اور خارج قسمت ق سی تغیر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق ر سے ہوگی
 دفعہ ۲۲۴ کے مثال میں قیمت ۱۲ اور ل کے در میان واقع ہوتی ہے
 پس ق کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی قیمت ۴ لا کو جب لا = ۲ کے قیمت ۳ لا - ۲
 جب لا = ۲ کے تقسیم کرو تو ق = ۱۲ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک
 مرتبہ اشارہ تقریب میں قریب دو چند کے ہر دفعہ کے عمل میں ہونگے
 (۲۲۵) جو خطوط منحنی کی مسائل میں اصول علم مقصولات کو کام میں لانا طالب علم جانتی ہیں اور علم ہے
 موافق نیوٹن کی ترکیب تقریب کے قاعدہ قدریر کی توضیح کرنی ہر سان ہے



فرض کرو کہ ح (لا) ایک خط منحنی کا حصہ مساوات ح (لا) سے دریافت ہوتا ہے اور کم اور ح ہم کو معلوم ہیں اور ح کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی ہے خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ پیر ظاہر ہی کہ ح (لا) منفی ہی اگر ط و محور کی مثبت سمت مقرر کی جائے اور ح (لا) یہی نقطہ پیر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ح پر محور لا کے لحاظ سے محذب ہے اور ماس ح ت کہچہ اور فرض کرو کہ م = مہ تو م ت = - ح (سہ) / ح (سہ) موافق علم حرکات کے ہوگا

پس م سی لقرب نیو طنی شروع ہوتا ہی اور ت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان م اور ت کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اجزا ترکیب لقرب کا کامیابی نہ ہو سکتا ہے نقطہ پیر ح (لا) مثبت ہی اور ح (لا) منفی ہی ماس رص کہچہ اور لقرب نیو طنی ت سے شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ت مختلف سمت میں ت واقع ہیں علاوہ برین یہ یقینی نہیں ہی کہ ص ق چھوٹا ت ت سی ہی اور یہ یقینی نہیں ہے کہ عرب ص ہی جاری ہوتا ہی پس لقرب ت سی شروع ہوتا ہے طالب علم شکلین مرقم کر کی شرح (لا) اور ح (لا) کے حدود مذکور میں علامت نہ بد لینی کی توضیح کر سکتا ہے

ابھار یوان باب صورتی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریباً دریافت کرنی کی لگی اب ہم ترکیب تقریب لکھی ہیں جسکو ہورنر صاحب فی ایجاد کیا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو تو ح (ط + لا) = . وہ مساوات ہوگی جسکی

قیمتیں اول مساوات کی قیمتوں سی بقدر ط کے کم ہونگی

مساوات ح (لا + ط) کو شرح کر کے لکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

اور ص کو بجای او ب و س اور د در کے کام میں لائیں

$$۱ = ۱$$

$$۱ ط + ع = ۲ ط + ب = سر کے لکھو$$

$$سر ط + ق = ۳ ط + ۲ ب + س = جر کے لکھو$$

$$حر ط + ی = ۴ ط + ۳ ب + ۲ س + د = سر کے لکھو$$

$$سر ط + ص = ۵ ط + ۴ ب + ۳ س + ۲ د + ر = ح ط$$

(۳) ح ط کا حساب مثل ج (ط) کے کرو اور حروف را اور بر و سر کو کام میں لاؤ تو

$$۱ = ۱$$

$$۱ ط + بر = ۳ ط + ب = سر کے لکھو$$

$$سر ط + جر = ۴ ط + ۳ ب + س = سر کے لکھو$$

$$سر ط + سر = ۵ ط + ۴ ب + ۳ س + د = ح ط (ط)$$

(۴) سیط ح ط کا حساب کرو اور ا و د و سر کو کام میں لاؤ

$$۱ = ۱$$

$$۱ ط + سر = ۴ ط + ب = سر کے لکھو$$

$$فر ط + ص = ۵ ط + ۴ ب + س = ح ط (ط)$$

(۵) اب ح ط کا سیط ح ط کر سکتی ہیں اور فر کو کام میں لاؤ

$$۱ = ۱$$

$$۱ ط + فر = ۵ ط + ب = ح ط (ط)$$

$$(۶) ازرا = ح ط (ط)$$

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی

ب	س	د	ر	ف
لط	ع ط	ق ط	م ط	ص ط
ع	ن	س	ص	ج ط
لط	س ط	ح ط	س ط	
ر	ح	س	ح (ط)	
لط	س ط	ص ط		
شر	ص	ط ح (ط)		
لط	ط			
م	ط ح (ط)			
لط				
ط ح (ط)				

ہر خط عرضی کے نیچے اسی اوپر کے دو مقداروں کا حاصل جمع لکھا ہے
 پس ہم فی ترکیب ہونے کی عمل کی مساوات $(ط + لا) =$ کی مثال بنائی گی جب وہ پانچویں درجہ
 کی ہو تب لا دی خواہ مساوات کا درجہ کچھ ہی ہو عمل یہی ہو گا
 (۲۳۲) مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک مساوات معلوم ہے جسکی ایک قیمت ۳۰۰ اور ۴۰ کی درمیان واقع
 ایک دوسری مساوات بناؤ جسکی قیمتیں بنسبت اول مساوات کی بقدر ۱۰ کی کم ہوں
 تو دوسری مساوات کی قیمتیں ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوں گیں اور امتحان ہی بہ دریافت
 کرو کہ ۱۰ کا کون بڑی سی بڑا ضعف اس قیمت میں شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۷۰ ہے
 اب تیسری مساوات بناؤ جسکی قیمت دوسری مساوات سی بقدر ۷۰ کے کم ہو تو
 اس تیسری مساوات کی قیمتیں ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوں گیں اب امتحان ہی بہ دریافت
 دریافت کرو کہ قیمت میں کون بڑی سی بڑا صحیح عدد شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۲۰ ہے
 اب چوتھی مساوات بناؤ جسکی قیمت تیسری مساوات سی بقدر ۲۰ کے کم ہو تو اس
 چوتھی مساوات کی قیمت ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوں گیں اب امتحان ہی بہ دریافت
 کرو کہ کتنی دسویں حصہ زیادہ سی زیادہ اس قیمت میں شامل ہیں
 فرض کرو کہ وہ آٹھ دسویں ہیں تو اس پانچویں مساوات کی قیمت ۱۰ اور ۱۰ کے

درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت
میں شامل ہیں فرض کرو کہ سوین حصی ہیں
اول فرض کرو کہ ۳۷۲۵۸۷ قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہ معلوم ہوتا ہے کہ
دوم فرض کرو کہ ۳۷۲۵۸۷ قیمت سات سوین حصی پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہ مستط ہوگا کہ ایک مساوات ہے
جسکی قیمتیں مساوات اول کی قیمتوں سی بقدر ۳۷۲۵۸۷ کے چوٹی ہیں اور اسکی قیمت
۳۷۲۵۸۷ اور ۳۷۲۵۸۷ کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۳۷۲۵۸۷ اور ۳۷۲۵۸۷ کے درمیان واقع ہے

پس اسی معلوم ہوتا ہے کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتوں کل جسکا ذکر ۲۳۱ میں کسطح حاصل ہوتا ہی اور
حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہو جاتی ہے
(۲۳۳) ہم فی دفعہ گذشتہ میں یہ بیان کیا ہی کہ بعض اعداد امتحان سی درپٹا ہوتی ہیں
اب ہم یہاں ایک طریقہ ان امتحانوں کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ $C = 0$
مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملوں سی ہم فی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتیں
مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر C کی کم ہوں یعنی یہ فرض کرو کہ ہم مساوات
 $C + 0 = 0$ کی حاصل کریں اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چوٹی سی ہے
تو اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی

پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی $C = 0$ اقرب ہوگا
پس $C = 0$ اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء C کے واسطی ہم تلاش کریں گے
(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ $C = 0$ $2 = 3 - 4 = 5 - 6 = 7 - 8 = 9 - 10 = 11 - 12$ اب امتحان
معلوم ہوتا ہی کہ $C = 0$ (۲۰۰) منفی ہی اور $C = 0$ مثبت ہی پس مساوات $C = 0$
کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہیں جسکی قیمتوں

قیمتوں میں ہر ایک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہو جائی

$$\begin{array}{r} ۲۰۰ - ۷۷۱ - ۲۳۲ - ۷۷۱ - ۲۰۰ \\ ۲۹۴۵۱۱ - ۱۵۴۰۰ - ۷۰۰ \\ \hline ۲۹۴۵۱۱ - ۱۵۸۳۲ - ۷۰۰ \\ \hline ۱۵۲۰۰ \\ ۵۰۵۴۴ \\ \hline ۷۰۰ \\ ۳۲۷ \\ \hline ۷۰۰ \\ ۷۲۷ \end{array}$$

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (۱۵) = کی قیمتوں میں مساوات کی قیمتیں بقدر ۲۰۰ کے کم ہیں وہ یہ ہیں کہ

$$۲۰۰ + ۷۲۷ + ۵۰۵۴۴ + ۷۰۰ = ۲۹۴۵۱۱ - ۷۰۰$$

$$۵۰۵۴۴ = (۲۰۰) - ۲۹۴۵۱۱ اور ح (۲۰۰) = ۵۰۵۴۴$$

اسی معلوم ہوا کہ ح (۲۰۰) زیادہ قریب بدلت ۵۰ کی ہی پس مساوات کی قیمتوں میں سے

ہر ایک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۲۹۴۵۱۱ - ۵۰۵۴۴ - ۷۲۷ \\ ۷۵۹۵۸۰ - ۷۱۳۵۰ - ۱۰۰ \\ \hline ۱۴۲۸۲۸۹ - ۹۱۹۱۴ - ۸۲۷ \end{array}$$

اس طرح سی ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اس واسطی ح (۲۵۰) = ۱۴۲۸۲۸۹ مثبت ہے

اور ح (۲۰۰) منفی ہی پس قیمت چھوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۳۳ کی ہدایت پر

چلیں سی اکثر ہم ایک بڑا عدد معائن کی واسطی تجویز کرینگے اور خاص کر ابتداء عمل میں تو

بہ ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنے میں واقع ہوتی ہے کہ ہم ایک بڑا عدد

جذد میں تجویز کرتے ہیں جسی جذر نہیں نکلتا

اب ہم ۷۰ پر امتحان کرینگے

$$\begin{array}{r} ۲۹۴۵۱۱ - ۵۰۵۴۴ - ۷۲۷ \\ ۳۳۱۳۸۲ - ۳۲۲۸۰ - ۸۰۰ \\ \hline ۳۷۴۳۲۴ - ۸۲۸۷۴ - ۸۰۰ \end{array}$$

پس ۷۰ بھی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۷۰) مثبت ہے

اب ہم ۳۰ پر امتحان کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۲۹۴۷۵۱۱ - \\ ۲۲۲۵۲۸۰ \\ \hline ۷۲۲۲۳۱ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰۵۴۴ \\ ۲۳۴۱۰ \\ \hline ۷۳۹۵۴ \\ ۲۵۷۱۰ \\ \hline ۹۹۵۸۴ \\ ۸۲۷ \\ \hline ۹۰۷ \end{array}$$

پس ج (۲۳۰) = ۷۲۲۲۳۱ - منفی مقدار ہی پس ۳۰ ایک مناسب عدد ہے
پس مساوات جسکی قیمتیں مساوات ج (لا) = ۰ کے قیمتوں سے بقدر ۳۳ کے کم ہیں
وہ یہ ہے کہ ۲ لا + ۴۰۷ + ۹۹۵۸۴ - ۷۲۲۲۳۱ = ۰

یہاں ج (۲۳۰) = ۹۹۵۸۴ پس ج (۲۳۰) = ۷ کے تقریباً
اب مساوات کی قیمتیں بقدر ۷ کے گھٹاتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۷۲۲۲۳۱ - \\ ۷۲۲۲۳۱ \\ \hline ۰ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۹۹۵۸۴ \\ ۹۹۵۸۴ \\ \hline ۰ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۴۰۷ \\ ۴۰۷ \\ \hline ۰ \end{array}$$

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ج (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے
کل عمل کو مختصر طرح کیا کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۲۳۷۷۱۱ - \\ ۲۹۴۷۸۰۰ - \\ \hline ۲۹۴۷۵۱۱ * \\ ۲۲۲۵۲۸۰ \\ \hline ۷۲۲۲۳۱ + \\ ۷۲۲۲۳۱ \\ \hline ۰ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۲۳۷ - \\ ۱۲۷۰۰ - \\ \hline ۱۲۸۳۷ - \\ ۴۵۷۰۰ \\ \hline ۵۰۵۴۴ * \\ ۲۳۴۱۰ \\ \hline ۷۳۹۵۴ \\ ۲۵۷۱۰ \\ \hline ۹۹۵۸۴ \\ ۹۹۵۸۴ \\ \hline ۰ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۴۰۷ - \\ ۴۰۰ - \\ \hline ۷۰ - \\ ۴۰۰ - \\ \hline ۰ \end{array}$$

باشم

ہورنر کی ترکیب

142

ہجرت نام * کیا گیا تو ان سید جبرئیل کا ختم ہوتا ہی اور چہان نشان خلائی وہاں دوسرا جبرئیل کا نام لیا گیا

(۲۳۵) اب ہم مثال کے پیش رو کی کلمہ کی کہ جسکی قیمت مائطہ محدود نہیں ہے فرض کرو کہ

ح(لا) = لا - لا۳ - لا۲ + لا۱ امتحان سی بیہ معلوم ہوتا ہے کہ ح(س) منفی اور

ح (N) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = کی ایک قیمت M اور ۳ کے درمیان ہے

پس عمل اس قیمت کی تقرب کا مین مرتبہ کی اشاریہ تک یہ ہوگا

MS 1A)	0	Y-	W-
	<u>4-</u>	<u>0</u>	<u>W</u>
	1-*	Y-	<u>W</u>
	<u>5241</u>	<u>9</u>	<u>W</u>
	5PWA-	6*	<u>W</u>
	<u>51421PA</u>	<u>541</u>	<u>W</u>
	5.61124-#	6541	<u>4*</u>
	<u>5.4A.24W10P</u>	<u>54P</u>	<u>51</u>
	5.0.359AANA-	154P	451
		<u>51P4N</u>	45P
		15P04N	<u>45P4P</u>
		<u>51P4A</u>	5.0.
		15P1P4P #	<u>45P4P</u>
		<u>5.0.0.0NN</u>	<u>5.0.</u>
		15P1P1P1P1P	<u>45P4N</u>
		<u>5.0.1.0.0A</u>	5.0.
		15P0A010P	<u>45P4 #</u>
			5.0.0A
			<u>45P4A</u>
			5.0.0A
			<u>45P4N</u>
			5.0.0A
			<u>45P4N</u>

اب قیمت کے دو سو پندرہ کے دریافت کرنے کے واسطے - ^{4538N} ^{۱۰} ۱۰

پیس اس سب سے زیادہ قریب عدد امتحان کرنی کی لٹی ہے اور قیمت کو تیس سو سو روپے کرنی کی دوا

۱۲۳۹ء سے ۱۲۴۲ء تک کے واسطے ہے

اور قیمت کی چوتھی ہندسہ کی دریافت کرنی کی واسطی - $\frac{5.61861}{852832}$ ہم کو حاصل ہوتا ہے

پس ۰۸ سوئب سی زیاورہ قریب عدد امتحان کی واسطی ہی ان سب صورتوں میں جس صورت

بیان کیا ہے وہ درست بیٹھا ہے
(۲۳۷) دفعہ گذشتہ میں جو مساوات لکھی تھی اسکو دوسری مثال سمجھاؤ اور اسکی قیمت ۱۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

$$\begin{array}{r} ۱۵۲۰۱۹ \div ۵ \\ ۲- \\ \hline ۱۰۰۰ * \\ ۹۹۲- \\ \hline ۸۰۰۰۰۰ \\ ۲۸۶۳۹۹- \\ \hline ۳۱۲۰۴۰۱۰۰۰ + \\ ۲۹۲۶۰۴۰۴۰۷- \\ \hline ۱۹۳۵۷۰۰۴۴ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۲- \\ ۲- \\ \hline ۲- \\ ۱- \\ \hline ۵۰۰- * \\ ۲- \\ \hline ۲۹۹- \\ ۸- \\ \hline ۲۸۸۰۰۰۰- X \\ ۴۰۱ \\ \hline ۲۸۶۳۹۹- \\ ۴۰۲ \\ \hline ۲۸۶۸۶۹۰۰ * \\ ۳۴۲۱۴ \\ \hline ۲۸۶۸۷۳۲۸۷- \\ ۳۴۲۵۲ \\ \hline ۲۸۶۸۶۲۳۲- \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳- \\ ۱- \\ \hline ۲- \\ ۱- \\ \hline ۱- \\ ۰۰ * \\ \hline ۲- \\ ۲- \\ \hline ۲- \\ ۲- \\ \hline ۴۰۰ * \\ ۱- \\ \hline ۴۰۱ \\ ۱- \\ \hline ۴۰۲ \\ ۱- \\ \hline ۴۰۳ * \\ ۴- \\ \hline ۴۰۳۴ \\ ۴- \\ \hline ۴۰۷۲ \\ ۴- \\ \hline ۴۰۷۸ \end{array}$$

اس دفعہ اور دفعہ ۳۳۵ کی ترتیب میں فرق اس بات سے پیدا ہوتا ہے کہ عمل میں یہہ اکثر دستور سے کہ علامت عشریہ کی ساقط او سبط کر دیتی ہیں جس طرح کہ اعداد کی تقریبی جذری نکالنے میں قیمت میں جو جزو عشریہ ہوا اسکی واسطی یہ قاعدہ کافی ہے کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت میں معلوم ہو جائیں اور کسر عشریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہنچی تو دو ان عمل کی اول خانہ میں دائیں طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ میں دو صفر اور تیسرے خانہ میں بن صفر اور علیٰ ہذا القیاس اگر اور خانی عمل کی تین سے

نظامہ ہونے اور یہ عمل ایک فنہ کا اس طرح کرو کہ گویا سب ہی ہندی قیمت کی اعداد صحیح ہوتی اور
پھر صفروں کا الحاق موافق سابق کی عمل میں لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت میں جب ۲ نکل چکی بعد اس کی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجویز ہوگا۔
 - - - - - ۸۸۸ - - - - - ہی اور ہم ایک سی کم ہی پس ایک صفر قیمت میں لگاؤ اور اول خانہ عمل میں ایک
 صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانہ عمل میں اور تین اور زیادہ تیسرے میں الحاق کرو
 اور عمل موافق مسابلق کی کرو

یہ امر ظاہری ہے کہ اشلہ گذشتہ میں اول خانہ میں عمل کا اختصار ہو سکتا تھا کیونکہ یہاں فی ہفتا
کہ جو بیاج عمل ہوتا ہے اور انکو لکھیں اور سان سان عمل کو ذہن میں کریں مگر ہم فی صاف صاف سمجھانے
کے واسطی کل عمل کی صورت مفصل لکھی ہے لیکن اسکا اختصار نہیں کیا
(۲۳۷) جب قیمت میں بعض ہندی نکل ائی تو عمل مختصر کی اعانت سے اور ہند قیمت کی فہم
ہو جائیں اس کی مثال مساوات $2 + 3 + 4 + 5 = 15$ کی قیمت قیمتوں کے دریا کر ذہن دیتی ہیں
قیمت میں پانچ مرتبہ عشریہ کی جب تک ہم کو دریا ہو نگی عمل تمام اور کمال کرینگے

154300.5 / 5 =

7
7 0 0 0
7 4 4 6
7 7 7 0 0 0
7 7 7 7 7 6
4 4 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 4 7 7 7 7 0 1 7 5
4 1 7 7 6 7 7 7 6 0

$$\begin{array}{r}
 P = \\
 N \\
 \hline
 P \\
 0 \\
 \hline
 2.. \\
 1A9 \\
 \hline
 1A9 \\
 1A1 \\
 \hline
 1.A2.. \\
 P = 64 \\
 \hline
 11-669 \\
 P = A1 \\
 \hline
 11P A42..... \\
 MN90-70 \\
 \hline
 11PA2-M90-70 \\
 MN90.0= \\
 \hline
 11PA2P99--41
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mu \\ \hline \mu \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 40 \\ \hline \mu \\ 4\mu \\ \hline \mu \\ 44 \\ \hline \mu \\ 44- \\ \hline \mu \\ 44\mu \\ \hline \mu \\ 444 \\ \hline \mu \\ 444- \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 444.00 \\ 5 \\ \hline 444.01 \\ 5 \\ \hline 444.015 \end{array}$$

اختصار عمل کا قاعدہ یہ ہے کہ ہر دفعہ کی عمل میں ایک ہندسہ عمل کی آخر خانہ میں اول سی دور کر دے مگر ایک اور آخر خانہ عمل میں سی دو ہندسی مگر دوا اور علی ہذا القیاس اب وہی مثال لیتی ہیں جو اوپر بیان ہوئی اور اس مختصر قاعدہ کو عمل میں لاتی ہیں

$$\begin{array}{r} 444.015 \quad 11286399.0045 - 9849439222 \\ 55421 \\ 8326885222 * \\ 49.1241.18 \\ 224422225 - 112851.850 * \\ 338425422 \\ 1.6948801 - 112851562 \\ 289 \\ 112852.43 \\ 2 \\ 112852.8 \\ 2 \\ 112852.1 \end{array}$$

اوس مقام پر جہاں بودا عمل ختم ہوتا ہے ہندسہ آخری ۸ جو تیر ہوا، اب ہم کو آخر خانہ عمل کے آغاز سے ساقط کرتی ہیں الا ایک اور ۱۵ آخر خانہ عمل کے آغاز سے لفظ کرتی ہیں اولاد اول مرتبہ میں ابرا عمل کے ۴۹۹ کو ۸ میں ضرب دی اور حاصل ضرب کو عمل کی خانہ آخری میں لکھا حاصل ضرب ۵۵۴۲۱ سمجھا گیا ہے اگر ۴۹۹ کو ۸ میں ضرب دی ہی اور اول ہندسہ کو الگ کر لیا ہی پس ۵۵۴۲۱ نسبت اس قیمت کے ۵۵۴۲۰ سے زیادہ قریب ہی پس ۵۵۴۲۱ کو ۱۶۳۹۹۰۰۰ پر زیادہ کر دے گا کسی کی مرتبہ کا ہندسہ ہم نے لکھا ہے اسلی کہ ہم فی بائخ کے ساقط کرنے کی رعایت رکھتے ہیں * سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ اول مرحلہ عمل مختصر کیا ہے ختم ہوا ہے اب کو دوسری خانہ عمل سے ساقط کر دے اور ۱۵ خانہ عمل سے تو اول خانہ عمل میں مختصر ہو کر ۴۹ رہ جائیگا

اب ہندو آخری قیمت کا ہے اور مرحلہ عمل کا وہاں ختم ہوتا ہی جہاں پہلے نشان ہے
 اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل میں سی ساقط کر د اور ۴ کو اول خانہ عمل میں سی تو اول خانہ عمل تینا بود
 ہو جائیگا مگر یہ بھی کچھ اثر قیمت کی ہندسہ آخری ۳ پر کری گا اور جب ۴ کو ۳ میں ضرب دیں
 اور دو ہندسی ساقط کریں تو ۲ باقی رہینگے
 اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہیں اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی
 اور اسی الٹہ ہندسی اور قیمت میں مستنبط ہونگے

۱۰۷۹۹۸۸۰۱ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۱۰۱۵۸۷۴۸۹	
۴۸۱۱۱۱۲ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۵۴۳۳۷۴۱	
۷۷۷۳۵۱ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۷۷۷۲۵۱	
۹۰۱۰۰ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۷۹۰۱۳	
۱۱۰۸۷ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۱۰۱۵۸	
۹۲۹ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۹۰۲ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۲۷ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۲۲ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰
۵ -	۱۱۲۸۷۵۲۱۰

کوٹھا کر دینا

اس تقریب پر اعتبار آخر ہندسہ تک ہو سکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہ ہے کہ آخر ہندسہ سبج
 اس واسطی کہ اگر کل عمل تمام و کماں کیا جاتا تو آخر خانہ عمل میں بہت سی ہندسی اون ہندسون
 کی دائیں طرف ہوتی جواب لکھی ہوئی ہیں مگر وہ ہندسی جواب لکھی ہوئی ہیں تو اوسکی مقامات
 میں کچھ تغیر نہیں واقع ہوگا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطروں کے آخر ہندسہ میں
 دوسری سطریں کے آخر ہندسہ سے بھدرا ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ میں جو قیمت درج ہوئی ہیں وہ مساوات ۳ - ۱۱۳ - ۵ + ۵ =
 منفی قیمت کی قدر عددی ہی ہیں اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۱۲۳۵ اور ۲۳۴ میں جو قیمتیں درج ہوئیں

کی ہم کو اصلی قیمتیں دریافت کرنی مطلوب ہوئیں ہی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم ناممکن قیمتیں سطح دریا کر سکتی ہیں کہ ایک اور خاص مساوات بنائیں اور اسکی اصل قیمتیں دریافت کریں اسبہ ہم ثابت کرینگے کہ اون دو مچھول کی مساواتوں میں سے ایک مچھول کو دور کر کے سطح ایک مچھول کی مساوات بنائی میں اکیسویں باب میں محادلات کی ناممکن قیمتوں کی دریا کرنی کی ایک اور ترکیب لکھینگے طالب علم کو چاہی کہ وہ تہر فورڈ کی او میں مضمون کو دیکھی حسین اونہوں فی اعداد ہی مساواتوں کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

اونیسواں باب قیمتوں کی بالقریبہ جملی

(۲۴۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقداروں کا بالقریبہ اول مقدار کے لحاظ سے کہلاتا ہے جو او میں سطح واقع ہوں کہ اگر اونہیں سے دو دو میں تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو مثلاً $1 + 2 + 3$ جملہ بالقریبہ تین مقداروں ب و س کا ہے

اور نیز اب $1 + 2 + 3$ جملہ بالقریبہ او نہیں مقدار کا ہی ہوگا کہ اگر او ب و س میں دو دو کو تبادل ہو تو جملہ متبدل نہیں ہوتا

(۲۴۳) مساوات کی مثال جملی بالقریبہ او کی قیمتوں کی ہوتے ہیں

اسو سطحی کہ بموجب دفعہ ۴ کے مساوات $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ میں $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ مجموعہ قیمتوں کے

$55 =$ دو دو قیمتوں کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

اور علی ہذا القیاس اور یہ امر ظاہر ہے کہ جو جملی قیمتوں کی یہاں واقع ہوتی ہیں جملہ بالقریبہ تین ہیں

اس باب کا مطلب اعظم یہ ہے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ ہر ایک جملہ بالقریبہ ناطقہ مساوات کی قیمتوں کا مساوات کی مثال کی قیمتوں میں بیان ہو سکتا ہے اب ہم آغاز مطلب کا نیوٹن حساب کی او ضابطہ سے کرتی ہیں جو مساوات کی قیمتوں کی قواعد جمع کرنے کے باب میں ہے

(۲۴۴) فرض کرو کہ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ کو ج (لا)

تعبیر کرنا ہی اور واجب و س اور مساوات ح (لا) = کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ ص}_1 = 1 + \text{ب} + \text{س} + \text{د} + \dots$$

$$\text{ص}_2 = 1 + \text{ب} + \text{س} + \text{د} + \dots$$

$$\text{ص}_3 = 1 + \text{ب} + \text{س} + \text{د} + \dots$$

اور علیٰ ہذا القیاس ص مجموعہ قیمتوں کا ہی اور ص مجموعہ قیمتوں کے جذروں کا، اور ص مجموعہ قیمتوں کی کعبوں کا ہی غرض بالعموم ص مجموعہ قیمتوں کے م قوتوں کا ہے بموجب دفعہ ۴ کے

$$\text{ح (لا)} = \frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{ب}} + \frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{ب}} + \frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{ب}} + \dots$$

ص حاصل ہوتا ہے کہ

اس مطابق کی بائیں طرف جو تقسیمیں لکھی ہیں وہ بموجب دفعہ ۲ کی ٹھیک ٹھیک ہو سکتی ہیں اور ہم کو یہ

$$\frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{ب}} = 1 + (1 + \text{ع}_1) \text{لا}^{-1} + (1 + \text{ع}_2) \text{لا}^{-2} + (1 + \text{ع}_3) \text{لا}^{-3} + \dots$$

$$+ (1 + \text{ع}_4) \text{لا}^{-4} + \dots + (1 + \text{ع}_m) \text{لا}^{-m} + \dots$$

اور اسی کی متماثل جمعی $\frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{ب}}$ اور $\frac{\text{ح (لا)}}{1 - \text{س}}$ حاصل ہوگی اور جمع کرنی ہی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ح (لا)} = \text{ن لا}^{-1} + (\text{ص}_1 + \text{ع}_1) \text{لا}^{-2} + (\text{ص}_2 + \text{ع}_2) \text{لا}^{-3} + \dots$$

$$+ (\text{ص}_3 + \text{ع}_3) \text{لا}^{-4} + \dots + (\text{ص}_m + \text{ع}_m) \text{لا}^{-m} + \dots$$

$$\text{اور نیز ح (لا)} = \text{ن لا}^{-1} + (1 - \text{ن}) \text{ع}_1 \text{لا}^{-2} + (1 - \text{ن}) \text{ع}_2 \text{لا}^{-3} + \dots$$

$$+ (1 - \text{ن}) \text{ع}_m \text{لا}^{-m} + \dots$$

اس مطابق مین امثال لا کی یکساں قوا کے برابر لکھو تو

$$\text{ص}_1 + \text{ن ع}_1 = (1 - \text{ن}) \text{ع}_1 + \text{ص}_1 + \text{ع}_1 = 0$$

$$\text{ص}_2 + \text{ع}_2 + \text{ن ع}_2 = (1 - \text{ن}) \text{ع}_2 + \text{ص}_2 + \text{ع}_2 + \text{ع}_2 = 0$$

اور علیٰ العموم

$$\text{ص}_m + \text{ع}_m + \text{ن ع}_m = (1 - \text{ن}) \text{ع}_m + \text{ص}_m + \text{ع}_m = 0$$

یعنی ص م + ع ا ص م - ا + ع ه ص م - ا + ع و + ع م - ا + ص ا م ع م =

اس نتیجہ عامہ میں مہربانی کے چھوٹا فرض کیا گیا ہے

اس نتیجہ عامہ کی وساطت سے ہم مجموعہ قسمتوں کی مومن قوت کا مثال دو قسمیوں کے ادنیٰ درجہ کے

قوتوں کی قوتوں میں بیان کر سکتی ہیں اور اسی عمل کو کمرسہ کر کر فی سی ایم قیمتوں کی م وین قوت کے پھر

کو ہمال کی رمقوں میں بیان کر سکتی ہیں

اب فرض کرو کہ م کی ساتھ ن ہی چھوٹی ہوئی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (۷) =۔ کی

لا من من ضرب دو لولام - ح (لا) = - یعنی

$$= \mathcal{U}^{-1} \mathcal{U} \mathcal{E} + \dots + \mathcal{U}^{-1} \mathcal{U}_p \mathcal{E} + \mathcal{U}^{-1} \mathcal{U}_1 \mathcal{E} + \mathcal{U}$$

کی جگہ متواتر قیمتیں ۱۰۰ بوس... رکھو اور حاصل کو جمع کرو تو اس طرح

$$= \frac{m}{n} + \frac{m-1}{n} + \dots + \frac{m-m+1}{n} = \frac{m}{n}$$

مسئلہ سہم مساوات کی قیمتوں کی کم وین قوتوں کی مجموعہ کو مثال مساوات اور

میتوں کی ادنیٰ قوتوں کی قوتوں میں اس حالت میں کہ مہجوناں ہی ہو بیان کر سکتی ہیں اور

ی عمل کو مکڑیہ کر کر فی سی مساوات کی قیمتوں کی م قوتوں کو جمع کر سکتے ہیں

(۲۴۵) مساوات ح (۱) =۔ کی قیمتوں کی تسلی قانون کی مجموعہ کو دریافت کرو

کی جگہ پر رکھو اور اس بی بی پوئی سادات میں ٹیمپون کی مثبت قوتوں کے مجموعہ کو معلوم کرو

دفعہ گذشتہ کی آخری جین م کو متواتر برابر ۱- اور ۲- اور ۳- کے

ماڈل تو ایسی متواتر ص۔ ۱ ص۔ ۲ ص۔ ۳۔۔۔ حاصل ہونگے

(۲۴) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عامہ کی صورت اس سوال کے صورت میں تبدیل ہو جائی

عاصم مقدّم جملوں کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کر دینگے

یہی جملہ بالقرینہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج قسمت ہوگا جو ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیح کو

سیر جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیح برقیہ کرنی سی پیدا ہوا ہو کوئی ساجد بالقرینہ ناطقہ صحیح کرتی ہے

تہ ہو تو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہو گا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط بحث متجانسہ جملوں ہی پر چاہی ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف اجزاء اسی ہو سکتا ہے جن کو مجموعہ قوت یا اول کا ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نامختلف ہوں ایسی صورت میں جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ قوت متجانسہ جملوں کا ہی جو متحدہ درجہ ہیں اور اول میں سب قوتوں میں ایک ہی قوت ناما ہے اسی معلوم ہوا کہ فقط اول ہی جملوں بالقرینہ ناطقہ متجانسہ پر کرتی چاہی جن میں تمام قوتوں میں قوت ناما ایک ہی ہیں

(۲۴۷) فرض کرو کہ ۱ و ۲ و ۳ اور ۴ مساوات معلوم کی قیمتوں کو تعبیر کرنے ہیں بموجب دفعہ ۲۴۷ کے ہم امثال کے قوتوں میں قیمت

$$۱م + ۲با + ۳س + ۴دا - - -$$

کی قیمت بیان کر سکتی ہیں اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتے ہیں کیونکہ اس کی ہر ایک رقم میں ایک قیمت والی قیمتوں میں سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم میں قیمتوں میں سے دو دو ملحق ہوں تو اسکو درجہ رتبہ کا جملہ کہتے ہیں جیسا کہ پہلے جملہ

$$۱امس + ۲طاس + ۳صاس + ۴ساس - - -$$

اب یہاں ترتیب قیمتوں میں سے دو دو کی گئی ہے اور قوت تمام اول قیمت پر اور ع قوت ناما دوسری قیمت پر رکھا گیا ہے اب اس جملہ کو ہم ج ۱امس سے تعبیر کریں گے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقموں کا جیسی کہ رقم ۱امس ہے جب قیمتوں میں سے تین تین قیمتیں جملہ میں ملحق ہوں تو اس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتے ہیں جیسی کہ پہلے جملہ ہے

$$۱امس + ۲اسن + ۳اسن + ۴اسن - - -$$

یہاں ترتیب قیمتوں میں سے تین تین کی ایک دفعہ لی گئی ہے اور ہم اول قیمت پر اور ع دوسری قیمت پر اور ق تیسری قیمت پر رکھا گیا ہے ہم اس جملہ کو ہم ج ۱امس سے تعبیر کریں گے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقموں کا ہے جیسی کہ ۱امس سے ۱اسن کا ہے

اور اس سطح سے چوتھی اور زیادہ رتبہ کی جملی ہم مقرر کر سکتی ہیں اور اسی طریقہ سے ذیلی کثات کر سکتے ہیں۔
چونکہ ہم نے یہ بتا دیا ہے کہ ص م سے سطح جملہ کثات مساوات کی رقموں میں بیان کر سکتے ہیں
تو صرف یہ بتا دینا کافی ہوگا کہ ہم جن جملوں پر بحث کر رہے ہیں ان میں سے کوئی ایسی جملوں
کی رقموں میں جیسی ص م سے سطح بیان ہو سکتا ہے

(۲۶۸) دوسرے رتبہ کی ج م سے جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

$$\text{ہم کو معلوم ہے کہ } ص م = و ا + ب + س + \dots$$

$$ص ع = و ا + ب + س + \dots$$

ضرب دینی سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص م ص ع = و ا + ب + س + م + ع + \dots$$

$$+ و ا ب + و ا س + ب ا + \dots$$

$$\text{یعنی } ص م ص ع = ص م + ع + و ا ب$$

$$\text{اسی واسطی ج م سے } و ا ب = ص م ص ع - ص م + ع$$

اس میں م اور ن غیر مساوی فرض کئی گئی ہیں اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کریں تو
ج م سے دو درجہ برابر ہو جائیگی اور یہ حاصل جمع اس طرح بیان کیا جائیگا کہ

$$۲ ج (ا ب) \text{ اور اسی واسطی}$$

$$۲ ج (ا ب) = ص م - ص م$$

(۲۶۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ ج م سے کی قیمت دریافت کرو

$$\text{ہم کو معلوم ہے کہ } ج م = و ا ب + ب ا + س + و ا س + \dots$$

$$ص ق = و ا + ب + س + ق$$

ضرب دینی سے ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص ق ج م = و ا ق + ب ق + س ق + م ق + و ا س + \dots$$

$$= \frac{ع (لا) - ع (ا)}{لا - ا} + \frac{ع (لا) - ع (ب)}{لا - ب} + \frac{ع (لا) - ع (س)}{لا - س} + \dots$$

اس متطابقہ میں اجزاء صحیحہ اور اجزاء مکسورہ جدا جدا البسین برابر ہونگے اور اسی جملی بنائیہ جیسی کہ $\frac{ع (لا) - ع (ا)}{لا - ا}$ ہی بموجب دفعہ کے صحیح ہونگے فرض کر دو کہ $\frac{ع (لا) - ع (ا)}{لا - ا}$ کو $ع (لا)$ پر تقسیم کریں اور عمل کئی جائیں جب تک کہ باقی ایک جملہ صحیحہ لا کا ادنیٰ درجہ کا بنسبت $ع (لا)$ کی حاصل ہو اور باقی ہو تو متطابقہ کے اجزاء مکسورہ سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ع (لا)}{لا - ا} = \frac{ع (ب)}{لا - ب} + \frac{ع (س)}{لا - س} + \dots$$

کو ضرب دو تو

$$ع (لا) = ع (ب) + ع (ا) + ع (س) + \dots$$

+ ارقام صغیر بنسبت لا کے ادنیٰ قوتیں ملتے ہیں

پس $ع (ا) + ع (ب) + ع (س) + \dots$ باقی رہیں لا کے امثال کی برابر ہے (۲۵۱) اس باب کی صورت قانونیہ کی ایک مثال لکھتی ہیں فرض کرو کہ مساوات $لا - لا = لا + لا + لا + لا = ۴$ کی قیمتوں کی قوتوں کا حاصل جمع دریافت کرتا ہے

$$ص ۱ = ع - ع = ۱$$

$$ص ۲ = ع - ع = ۱ - ع ۱ = ۱۴$$

$$ص ۳ = ع - ع = ع ۱ - ع ۲ = ۱۵ - ۱۴ = ۱$$

$$ص ۴ = ع - ع = ع ۲ - ع ۳ = ع ۱ - ع ۲ = ۱۴ - ۱۵ = -۱$$

$$ص ۵ = ع - ع = ع ۳ - ع ۴ = ع ۲ - ع ۳ = ۱۴ - ۱۵ = -۱$$

$$ص ۶ = ع - ع = ع ۴ - ع ۵ = ع ۳ - ع ۴ = ۱۴ - ۱۵ = -۱$$

اور علیٰ ہذا القیاس

$$(۲) \text{ ا ب + ب س + س ا}$$

$$(۳) \text{ ا ب س}$$

$$(۱) \text{ ا + ب + س} = \frac{۱}{۲} (\text{سہ صدہ} + \text{سہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ}) = \frac{۱}{۲}$$

$$(۲) \text{ ا ب + ب س + س ا} = \frac{۱}{۲} (\text{سہ صدہ لڑ} + \text{سہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ}) = \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} (\text{ص}^۱ \text{ص}^۲ \text{ص}^۳ - \text{ص}^۲ \text{ص}^۱ \text{ص}^۳ + \text{ص}^۲ \text{ص}^۳ \text{ص}^۱ - \text{ص}^۳ \text{ص}^۱ \text{ص}^۲ + \text{ص}^۳ \text{ص}^۲ \text{ص}^۱ - \text{ص}^۱ \text{ص}^۲ \text{ص}^۳) = \frac{۱}{۲}$$

پس قیمتیں ص^۱ ص^۲ ص^۳ کی جو ابھی حاصل ہوئی ہیں ان کی جگہ متدرج کر دو تو قیمت

$\frac{۱}{۲}$ حج سہ صدہ لڑ کی دریافت ہوگی یا ہم اس طرح عمل کریں کہ

$$\text{حج سہ صدہ لڑ} = \text{حج سہ صدہ لڑ} = \text{صدہ لڑ فرج} = \frac{۱}{۲}$$

اور صدہ لڑ فرج = ثا ادر حج سہ = $\frac{۱}{۲}$ - ۲ بموجب دفعہ ۲۸ کے

$$\text{اسی واسطی ا ب + ب س + س ا} = \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ث})$$

$$(۳) \text{ ا ب س} = \frac{۱}{۲} (\text{سہ صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ} + \text{صدہ لڑ}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} \text{ حج سہ صدہ لڑ} + \frac{۱}{۲} \text{ حج سہ صدہ لڑ}$$

اس باب کی ترکیبوں ان دو بالقرینہ جملوں کے قیمت دریافت ہو سکتی ہیں اور ان کیوں کا ہم مختصر اس طرح کرتے ہیں کہ

$$\text{حج سہ صدہ لڑ} = \text{صدہ لڑ فرج} = \text{ثا} = \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ث})$$

$$\text{حج سہ صدہ لڑ} = \text{صدہ لڑ فرج} = \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ث}) = \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ث})$$

اسی واسطی کہ حج (سہ) دریافت کرنی کی واسطی اوس اوقات کے قیمتوں کے مجزوں کا حاصل جمع دریا

کریں ہمیں لاکھ جگہ لکھا جائے

$$\text{پس ا ب س} = \frac{۱}{۲} (\text{ع} + \text{ث} - \text{ث})$$

قیمتیں جملوں ا ب و س کی جو دریافت ہوئی ہیں ان کی صحت ثابت بھی ہو سکتی ہے اس کے

و بموجب دفعہ ۱۸۹ کے قیمتیں م کی مکعبی مساوات کی بموجب دفعہ ۱۸۸ کے ہیں

بیسوان باب استعمال بالقرینہ جملوں کا

(۲۵۲) مساوات کی قیمتوں کا بالفرض جملوں کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام میں لائیں گی اول ایسی مساوات کی بنائی جائے جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا مجذور ہوں اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات میں سی مجہول کی دور کرنے کا اسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا مجذور ہوں فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اس کی قیمتیں ۱۰۰ روپے ۰۰۰ ہیں تو مساوات مطلوبہ کی قیمتیں $(۱-ب)$ و $(۱-س)$ ۰۰۰ $(ب-س)$ ۰۰۰ ہونگی اور ان کی تعداد برابر اس جماع کی ہوگی جو چیزوں میں ہی دود کا لیا جائے یعنی $\frac{۱}{۲}$ (ن-۱) ایسا وسطی یہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجے کو تعبیر کر لگا۔ $\frac{۱}{۲}$ (ن-۱) کی جگہ ۱ رکھو اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$$

سے تعبیر ہوتی ہے اور ۱۰۰ روپے قیمتوں کی رو میں فوٹوں کا مجموعہ ہی پس ہم کو ۱۰۰ روپے ۱۰۰۰ کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی مثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۲ کے ان صورت قانونیہ سی متواتر دریافت ہو جائینگے کہ $۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$ اور علیٰ ہذا القیاس

$$\text{فرض کرو کہ } ۱۰۰ = (۱-ا) + (۱-ب) + (۱-س) + \dots$$

$$\text{پس } ۱۰۰ = ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + \dots$$

اب فرض کرو کہ ۱۰۰ روپے ۱۰۰۰ مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے فوٹوں کے مجموعوں کو تعبیر کرنی چاہیے

$$۱۰۰ = ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + \dots + \frac{۱۰۰(۱-۱۰۰)}{۱-۱۰۰} + \frac{۱۰۰(۱-۱۰۰)}{۱-۱۰۰} + \dots$$

لا کی جگہ متواتر ۱۰۰ روپے ۱۰۰۰ رکھو اور جمع کرو تو

$$۱۰۰ = ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + \dots + \frac{۱۰۰(۱-۱۰۰)}{۱-۱۰۰} + \frac{۱۰۰(۱-۱۰۰)}{۱-۱۰۰} + \dots$$

بائیں طرف جو ارقام لکھے ہیں ان میں اول اور آخری ارقام متساوی البعد ہیں برابر ہیں ایسا وسطی

اسو اسطی (۱-۱) (۱-۱) = ۱

اسیج (س) ح (ص) ح (لر) ... مساوات مستحق (لا) = کی قیمتوں کا جملہ

بالقرینہ ہی اور اسو اسطی اور اسکا حساب ہو سکتا ہے

(۲۵۵) ایک فائدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی

قیمتوں کے تفاوت کا مجذور ہوں دفعہ ۱۰۴ میں ہم فی بیان کیا ہے کہ اسی مساوات

مفروضہ کی قیمتوں کا مقام معلوم ہونا ہی مگر بہر طلب تو سٹرم صاحب کی ضابطہ سی خوب

حاصل ہونا ہی ایک اور بات اسی مساوات سے کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے تفاوت کا

مجذور ہوں حاصل ہوتی ہے کہ اسکی قیمتوں کی دیکھ کر سچا مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتوں کی تعداد معلوم ہو جائے

اسو اسطی کہ یہاں مظاہر ہے کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتیں ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی

قیمتیں ہوں گیں اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتیں نہ ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں ہوں گیں

اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں ہوں گیں اور اگر اسکی

کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بھی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درج چہارم یہ قیمتیں * لریا = ۲ اور * لویا = ۳ ہوں

تو اس صورت میں مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتیں ہوں گیں

(۲۵۶) اگر دو مساواتوں میں دو مقادیر مجہول ہوں تو اب ہم یہ بتلائیگی کہ انہیں سے

ایک مقدار مجہول قیمتوں کی بالقرینہ جملوں سے کس طرح دور کرتے ہیں

فرض کرد کہ مساواتیں یہ ہوں کہ

$$ع. لا + ع. لا - ع. لا + ع. لا + ... + ع. م =$$

$$ق. لا + ق. لا - ق. لا + ق. لا + ... + ق. ج =$$

مثال ع. و ع. د ع. م ... ق. و ق. م ... مقدار کے جملے نااطفہ صحیح ہیں اور

لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساوات میں سی اول مساوات سی لاکھ قیمتیں ارقام زمین دریافت ہوئی ہیں اور
دوب دس ۱۰۰ ان کو تعبیر کرتی ہیں ان کو دوسری ذات میں مندرج کر دو ہم کو م مساواتیں
کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہونگی یعنی

$$ق. ۱ + ق. ۱ - ۱ + ق. ۲ - ۲ + ق. ۳ - ۳ + ق. ۴ - ۴ =$$

$$ق. ۲ + ق. ۲ - ۲ + ق. ۳ - ۳ + ق. ۴ - ۴ + ق. ۵ - ۵ =$$

$$ق. ۳ + ق. ۳ - ۳ + ق. ۴ - ۴ + ق. ۵ - ۵ + ق. ۶ - ۶ =$$

پس تمام قیمتیں دیکھی جوں قابل داخل ہوتی ہیں وہ ان مساواتوں کی قیمتوں میں شامل ہیں
اور بالعکس اسکی جو کوئی قیمت ان مساواتوں کی ہو وہ دیکھی قیمت قابل داخل ہونی کے ہے

اسواسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صد ہی اور جب زمین بجائی دیکھی صد کہا جائے
تو اسکی قیمت صد ہوتی ہی پس لا = صد اور د = صد دو اصل مساواتوں کی شرائط کو پورا کر سیکے
اسواسطی کہ یہ قیمتیں بظاہر دوسرے مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہیں اور مساوات اول کی
شرائط لا = اسی پوری ہوتی ہیں خواہ کچھ ہی ہو پس اسسلی جب ہم لا = ۱ اور دین = ۱
کو صد مقرر کریں تو یہی اول مساوات کی شرائط پوری ہونگی اسی بہتہ استخراج ہوتا ہے
اگر اوپر کی مساواتوں کی دائیں طرف کی ارکان کو باہم ضرب دیں اور حاصل ضرب کو
برابر صفر کے لکھ دیں تو ایک مساوات اخرا کر دیکھی حاصل ہو جائیگی

مقادیر اور دس ۱۰۰ میں سی دو دو کجا ہم تبادل سی بہتہ حاصل ضرب متبدل نہیں ہوگا
اسسلی ان مقادیر کا وہ جملہ بالقرنیہ ہوگا اور اسسلی اسکی قیمت مساوات اول کو مثال
ع. د. ع. د. ع. ۱۰۰ کی رقموں میں بیان ہو سکتی ہی پس اسطرح آخر کو ایک مساوات
ناطقہ صحیحہ دیکھی حاصل ہو جائیگی اور اس میں وہی سب قیمتیں دیکھی ہونگی جو داخل ہونے
کی قابلیت رکھتی ہیں اور انکی سوا کوئی اور قیمت نہیں ہوگی
(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات ملجی ہی اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی

قیمتوں کی قوتوں کے مجموعی

146

(۲۶۰) بیرون صاحب کی شریکیت فہ ۲۴۴ میں جو بیان ہوئی ہے اسی سے متواتر حاصل جمع مساوات کی قیمتوں

کی قوتوں کا دریافت ہو سکتا ہے

ابنم ایک اور ترکیب تان کرنی ہیں جو کہ لگاؤ اس پہلی ترکیب سے نہیں ہوگا جس میں تین کے نو ذریعہ مفروضہ کا مجموعہ حاصل ہوگا
فرض کرو کہ ادوب دس .. بسا و ساج (لا) = کی قیمتیں ہیں تو ہم کو ہر حاصل ہوگا کہ

ج (۷) = (۷-۱) (۷-۲) (۷-۳) ... اور فرض کر دے کہ اس وقت تک درجہ کی ہی تو

طرفین کی لوکار تم لو ادبائیں طرف کی لوکار تم کی صورت مفصل لکھو تو یہ جمل ہوگا کہ

$$(\dots + s + b + 1) \frac{1}{b} = \frac{(n)}{b} \quad \text{رنگ}$$

$$(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \frac{1}{10} =$$

$$(\dots + 5 + 5 + 5) \frac{1}{11r}$$

پس باقی طرف مثال $\frac{1}{m}$ کا۔ $\frac{m}{m}$ ہی اسی معلوم ہوا کہ $\frac{m}{m} =$ مثال $\frac{1}{m}$ کے جو صورت مفصلہ

لوک (۱۱) میں نواح اور یہ صورت مفصلہ قواعد متعارفہ لائیں لکھی گئی ہو

اس میں م مثبت فرض کیا گیا ہے اگر وہ مثبت صحیح کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لاکھ چھیالیس روپے اور مساوات کی قیمتوں کی مثبت قوائے کا مجموعہ اس مساوات میں دریافت کرو

(۳۷۱) تمثیلاً مساوات لا-ع+لا+ق=۔ کی قیمتوں کی مقولوں کا مجموعہ دریافت کرو

پہاں $\frac{C}{P_0} = 1 - \left(\frac{C}{P_0} - \frac{C}{P_1} \right) - \text{لوک} \frac{C}{P_1} = 1 - \left(\frac{C}{P_0} - \frac{C}{P_1} \right) - \text{لوک} \left(\frac{C}{P_0} - \frac{C}{P_1} \right) - 1$

$$\dots + \frac{1}{u} \left(\frac{q}{u} - \frac{e}{u} \right) + \dots + \frac{1}{u} \left(\frac{q}{u} - \frac{e}{u} \right) + \frac{1}{u} \left(\frac{q}{u} - \frac{e}{u} \right) + \frac{q}{u} - \frac{e}{u} =$$

بشمال کابل کے۔ لوگ جے (لا) میں مختلف ارقام کے منتخب کرنی سی جنین لا واقع ہو

حاصل ہو سکتی ہیں ان ارقام کو اگر بہ ترتیب معکوس لکھیں تو

$$\dots + \left(\frac{U}{H} - \frac{E}{D}\right) \frac{1}{1-\rho} + \left(\frac{U}{H} - \frac{E}{D}\right) \frac{1}{1-\rho} + \left(\frac{U}{H} - \frac{E}{D}\right) \frac{1}{\rho}$$

لا = ص سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = ص تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ص) - لا - ص = ص = [(ا + ص) - ص - ا] = ص = [(ص - ص) - ا - ا] = ص = ا$$

اور یہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = ص

$$ن (لا + ص) - لا - ص = ن - لا - ص = [(ا + ص) - ص - ا] = ص = ا$$

یہ معدوم ہوتا ہے اگر ن - اجفت صحیح ہو اور ضعاف م کا ہو کیونکہ ص = ا اور ص = ا

اور اگر ن - اجفت صحیح ہو اور ضعاف م کا ہو تو یہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے

اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس (لا + ص) - لا - ص = ص = ا اور یہی نتیجہ

حاصل ہو سکتا ہے اگر ص کو بجای لا کے رکھیں

(۲۴۵) اباخر استعمال دفعہ ۲۴۲ کا یہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کرو کہ اس

$$۱ - \frac{ن - ۳}{(ن - ۴) + (ن - ۵) - (ن - ۶)} + \frac{ن - ۳}{(ن - ۴) + (ن - ۵) - (ن - ۶)} + \dots$$

$$+ \frac{ن - ۳}{(ن - ۴) + (ن - ۵) - (ن - ۶)} + \dots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

ص = ۱ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

ص = ۱ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۲ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۴۱ میں لا کو بجای ق کی اور لا کو بجای ع کی رکھو تو ص = لا + ص

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(لا + ص) - لا - ص = ص = [(ا + ص) - ص - ا] = ص = ا$$

$$+ \frac{ن - ۳}{(ن - ۴) + (ن - ۵) - (ن - ۶)} + \dots$$

فرض کرو کہ اسے و صہ واحد کے تین جز، لکعب ہوں لا = سد کی رکھو (۱) کی بائیں طرف کا رکن
بہ ہو جائیگا کہ

$$ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱) - \frac{ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱)}{۳} + \frac{ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱)}{۳} =$$

لیکن سد = ۱ اور سیواسطی صہ = سد صہ = سد اور سد = ۱ + صہ =

پس - صہ = سد + ۱ پس سد = (سد + ۱) اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (۱) کا
متبدل ہو کر یہ ہو گا کہ

$$ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱) - ۱ - \frac{ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱)}{۳} =$$

یعنی ن (سہ + ۱) ص

اور نیز جب لا = سد تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہ ہو جائیگا کہ

$$ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱) - ۱ - \frac{ن (سہ + ۱) (سہ + ۱) (سہ + ۱)}{۳} =$$

سیواسطی (سہ + ۱) - سد = ۱ - ن (سہ + ۱) ص (۲)

اگر ن طاق صحیح ہو اور ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر ۳ کے موجب
دفعہ ۲۴۲ کی ہی اور سیواسطی - ۳ = ن صہ ص = ن ص سیواسطی ص = ۳
اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے
بموجب دفعہ ۲۴۲ کے ہے اور سیواسطی ص =

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا - ۱ ہے

اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی سیواسطی ص = - ۱

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا تو دائیں طرف کا رکن صہ - سد = ۱

یعنی ۲ صہ کیونکہ سد + صہ = ۱ پس ۲ صہ = ن صہ ص اور سیواسطی ص = ۳

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہی کہ سلسلہ جو صی تغیر ہوتا ہی اوسمین محدود تعداد رقموں کی ہے

اور فی الحقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ۱ کے ہو تو مرقین سلسلہ من ہو گئیں

بڑی قیمت کی طرف ازروی تعداد کی لیکن اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی تعداد دی جالی
قیمتوں کی قالب سی بڑی نہ ہو تو $\frac{ص م + ۱}{ص م}$ کی کوئی حد غائی نہ ہوگی

(۲۴۸) مثال ۱۱۲ - ۵ = یہاں سلسلہ ص ۱ و ص ۲ و ص ۳

۰ ۲ و ۱۵ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۲۰ و ۱۳۲ و ۱۳۵ و ۱۵۴ و ۱۷۳ و ۱۸۰ و ۱۸۳

۵۹۸۴۹۹ و ۲۸۷۱۳۰ و ۱۳۸۹۱۲ و ۶۴۱ ۵۳۱ ۶۵۶

ہر ایک رقم کو او سکی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرتی ہیں تو بہرہ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل کو ایک سلا کی حد
کی طرف ہی اسی بہرہ تیر لگاتی ہیں کہ ایک حقیقی قیمت کچھ بڑی سی ہی مگر بہرہ مثال اس ترکیب کے
واسطی مناسب نہیں ہی کیونکہ حاصل ضرب تمام قیمتوں کا ہی اور ایک حقیقی قیمت کچھ زیادہ ۲ سے
اور باقی دو قیمتوں کا حاصل ضرب تقریباً ۵ سی ہی بہرہ دو قیمتیں جو جب فقہ ۱۷۲ کے خیالی ہیں
اور چونکہ ان کا قالب او سکی حاصل ضرب کا جذری تو قالب بڑا بہ نسبت ۵ کے ہوا
پس قالب بمقابلہ حقیقی قیمت کی بہت چھوٹا نہیں ہی پس جملہ $\frac{ص م + ۱}{ص م}$ اہستہ اہستہ
ایک حد غائی کی طرف پہنچتا ہے

(۲۴۵) دفعہ ۲۴۵ کے ترکیب متماثل ایک ترکیب ہے جس کی تعداد سب سے بڑی دو قیمتوں کا
حاصل ضرب خاص صورتوں میں معلوم ہو جاتا ہے

اس واسطی کہ $ص م = (۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

$ص م = (۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

$ص م = (۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

اسی واسطی $ص م = (۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

$ص م = (۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

اس کو لوم سے بغیر کر دو تو

لوم = $(۱ + ب) + (۱ + س) + \dots$

اب بموجب دفعہ ۲۴۴ و ۲۴۵ کے عمل کرنے سے ہم کو نتائج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر حقیقی قیمتیں ہیں تو $\frac{لوم + ۱}{لوم}$ کو خاطر خواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداد اُدوسب سے

بڑی قیمتوں کے حاصل ضرب کے قریب لاسکتی ہیں

(۲) اگر حقیقی قیمتیں تعداد بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سی ہی تو $\frac{لوم + ۱}{لوم}$ کی حدغائی

ہوگی یعنی ان قیمتوں میں سے سب سے بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداد سب سے دو بڑی قیمتوں کی حاصل ضرب کی جذری خیالی قیمتوں کا قالب بڑا ہے

تو $\frac{لوم + ۱}{لوم}$ کی حدغائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل

ضرب اوں خیالی قیمتوں کے حاصل ضرب کا جتنکا وہ قالب تھا

(۴) پس صرف ایک صورت جس میں $\frac{لوم + ۱}{لوم}$ سی حدغائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے

یہ ہے کہ ایک صرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتوں کی سب سے بڑی قالب سے تعداد بڑی ہو

اس صورت میں حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۴۵ کے دریافت ہو جاتی ہے

(۲۴۰) بعض صورتوں میں اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سی حاصل جمع ہونے والی قیمتوں کا دریا کرنا

ص م ص م + ۱ ص م + ۲ اور ص م + ۳ کی قیمتوں سے ہم کو بہرہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص م ص م + ۲ ص م + ۱ ص م + ۲ = (۱ + ب) (۱ + ب) + (۱ + ب) + (۱ + ب) (۱ - س) + (۱ - س) + ۲

+ ب س (ب + س) (ب - س) + ۲ + ۰

اب اس کو موم سے تعبیر کرو پس موم کی معنی تو دفعہ گذشتہ میں مفر ہو گئی ہیں اب ہم یہاں یہ دریا کرنا

موم کی ایک حدغائی اوں صورتوں میں ہی جتنکا ذکر اوپر کی دفعہ میں ہوا اور یہ حدغائی مجموعی

تعداد سب سے بڑی دو قیمتوں کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتوں کا ہی جتنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۴۱) پس دفعہ ۲۴۹ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتوں میں حاصل ضرب دو قیمتوں

کا بموجب دفعہ ۲۴۹ کی اور اوں کا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۴۰ کے حاصل ہو سکتا ہے

اور (۱) اور (۲) کی صورتوں میں بموجب دفعہ ۲۴۰ کی دو قیمتوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اوٹین سی بڑی قیمت معلوم ہو سکتی ہے

$$(۲۶۶) \text{ مثال } ۱۷ + ۱۷ + ۱۷ + ۱۷ = ۱ + ۱۷۳$$

یہاں تفصیل ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

ارقام ص ۱ و ص ۲ کے واسطے

۱- ۱۷۳ و ۲۳ و ۳- ۱۷۳ و ۲۳۴ و ۱۱۴- ۲۰۲ و ۱۵۷۱

ارقام لوم و لوم و ۰ کے واسطے

۲- ۵۰۸- ۲۴۷۷- ۱۷۱۳۷- ۷۴۹۱- ۳۴۷۲۱

اور ارقام موم و موم ۰ کے واسطے

۱۷۳ و ۸۸۱ و ۸۷۳ و ۲۴۷۷ و ۲۵۷۳۸۲ و ۱۳۴۳۸۲

اب یہاں سلسلہ ص ۱ و ص ۲ میں ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی ایک محدود عدد نہیں حاصل ہوتی اسی ہم کو یہ قطعی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی خیالی قیمتیں ہیں اور سلسلہ لوم و لوم ۰ کو اپنی قبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قیمت حاصل ہوتی ہیں جنسی معلوم ہوتا ہے کہ دو قیمتوں کی حاصل ضرب کی قدر ۵۰۸ ہے اور سلسلہ موم و موم ۰ کی ہر ایک رقم سلسلہ لوم و لوم ۰ کی ہر ایک رقم مناظر پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قیمت حاصل ہوتی ہیں جنسی معلوم ہوتا ہے کہ مجموعہ ان دو قیمتوں کا ۱۷۳۸۱۹ ہے

پس ان دو قیمتوں سی ہم دو خیالی قیمتیں تقریباً دریافت کر سکتے ہیں اور چونکہ مساوات کی لمبی چاروں قیمتوں کا مجموعہ ۱۷۳۸۱۹ ہے اور اسکا حاصل ضرب اسی مجموعہ باقی دو قیمتوں کا وغیرہ ۱۷۳۸۱۹ ہے اور اسکا حاصل ضرب وغیرہ ۱۷۳۸۱۹ ہی اسواسطی یہ دو قیمتیں بھی خیالی ہیں

پس اس طرح ہم کو یہ معلوم ہو گا کہ خیالی قیمتوں کے اول زوج کا قالب پانچ گنے دوسرے خیالی قیمت کے زوج کی قالب سی ہی اسی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو دریافت

دریافت ہوگا کہ $لوم = اب (۱ - ب)$ اور ارقام کو چھوڑ دین تو غلطی بقدر $\frac{۱}{۵}$ حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کر سکتی ہیں مثلاً ہم فی اوپر قیمتیں نو کی لوہ اور لوہ تک لکھی ہیں تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے میں غلطی قریب $(\frac{۱}{۵})$ دین حصہ کل کے واقع ہوگی

بایسٹوان باب سکر تا مفاد میرجھول کا یعنی سقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہزار مساواتیں دو جھول کی ہم کو حل کرنی ہیں بعض صورتیں ایسی ہوتی ہیں کہ جنہیں انوکھا حل کرنا نسبتاً سہان ہوتا ہے فرض کرو کہ لا اور مفاد میرجھول کو تعبیر کرتی ہیں پس اگر ایک مساوات میں لا ملحق ہو اور کوئی اور قوت لا کی نہ ملحق ہو تو اس مساوات سے لا کی قیمت کی قیمت میں دریافت کریں اور اسکو دوسری مساوات میں مندرج کریں تو ایک مساوات حاصل ہو جائیگی جس میں فقط مفاد میرجھول ہم ہی ملحق ہوگی اور اسکی قیمتیں تقریبی یا تحقیقی اداں ترکیبوں سے دریافت ہو سکیں جو اوپر بیان ہوئیں

اب ہم فرض کرو کہ مساواتیں $ا = ب =$ سی تعبیر ہوتی ہیں اور $ا$ اور $ب$ جلد سے اجزاء ضربی میں تحلیل ہو سکتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ $ا = لو کو کو کو اور ب = هو هو$ تو معادلات مفروضہ کی تمام حل ان ہزار مساواتوں کے حل کرنی سے حاصل ہوگی کہ $لو = ۰$ اور $هو = ۰$ ۔

$لو = ۰$ اور $هو = ۰$ ۔ اور $هو = ۰$ اور $لو = ۰$ ۔ اور $هو = ۰$ ۔ اور $لو = ۰$ ۔ اور $هو = ۰$ ۔

کالوں معادلات کی حل پر موقوف نہ ہو جو معادلات مفروضہ سے درجہ کم رکھتی ہیں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک اجزاء ضربی میں ہو ایک $ب$ کی اجزاء ضربی میں ہو ایک ساتھ بالکل مطابق ہو مثلاً فرض کرو کہ لو اور هو مطابق ہیں تو کوئی سی قیمتیں لا اور $ا$ کی جو مساوات $لو =$ کی شرائط کو پورا کر نیگے وہ ہمارا مساوان $ا =$ اور $ب =$ کی شرائط کو بھی پورا کر نیگے پس اگر کو میں لا اور دو ملحق ہیں تو ہم مفاد میرجھول میں سے ایک کو غلطی جو قیمت جابجی

مقرر کریں اور دوسرے قیمت اس کی مطابق نکال لیں اور اس طرح سی جتنی حل جاہل دریافت کریں
 اگر لو میں ایک مقدار مجہول مقدار دیگر مجہول میں سی ملے ہو تو ہم معادلات

۱ = ۱۰ اور ۲ = ۰ کی شرائط کو پورا اوس مقدار مجہول کے اوس قیمت سی کر سکتی ہیں
 جو مساوات ۱۰ = ۰ سی مستط ہو اور دوسری مقدار مجہول کی واسطی خواہ کچھ ہی قیمت مقرر کریں

(۲۷۴) ہم فی الہی بیان کیا ہے کہ دو مقدار مجہول کی مساواتوں کی سطح میں جملہ بالقرینہ کے
 استعانت سے ہم ایک مجہول مقدار کو دور کرتے ہیں اور ایک مساوات دوسرے مقدار مجہول کی حاصل
 کرتے ہیں اب ہم مقدار مجہول کی دور کرنے کی ایک اور ترکیب بیان کرتے ہیں وہ دو جبریحیوں کے

دفعی اعظم دریافت کرنے کی عمل پر موقوف ہے

(۲۷۵) فرض کرو کہ دو معزاد مساواتیں ج (لا و) = ۰ اور ج (لا و) = ۰

سو تعبیر کی جائیں اور لا = سہ اور ج = صہ کی سی قیمتیں ہوں کہ ونسی مساوات کی شرائط پوری ہوتی ہوں
 تو مساوات ج (لا و) = ۰ اور ج (لا و) = ۰ کی شرائط لا = سہ سی پوری ہونگی

اسی معلوم ہوا کہ ج (لا و) اور ج (لا و) کا ایک دفعی مشترک ہو اور یہ دفعی مشترک
 ایسا ہو کہ جب اس کو برابر صفر کی لکھیں تو اسی قیمتیں سہ کی ماہتہ لگ جائیں اور نیز وہ
 قیمت یا قیمتیں حاصل ہو جائیں جو ج = صہ کی ساتھ مشترک ہو اگر معادلات مفروضہ کی

شرائط کو پورا کریں

پس فرض کرو کہ ج (لا و) اور ج (لا و) کی لاکھ قواد متنازلہ کی ترتیب سی لکھیں

اور حسب معمول اس کا دفعی اعظم دریافت کریں اور یہاں تک عمل کریں کہ آخر کو ایک جملہ کا
 باقی میں حاصل ہوا اس کا ج (لا و) ہو تو کوئی ایسی قیمت کی داخل ہوتی قابل نہیں ہوگی جب تک کہ

ج (لا و) = ۰ کی نہ کری ہو اس کی اگر ج (لا و) نہ ہو تو ج (لا و) اور ج (لا و) کا کوئی دفعی مشترک نہیں ہوتی کا واسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہیں ہونگے۔ مگر اگر
 بالعکس درست نہیں کہ ہر ایک قیمت جو ج (لا و) کوئی نہ ہو وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسو اسطی کہ اشنا عمل میں یہ واقع ہو سکتا ہی کہ بعض فوائد لاکے مثال مکتور ہوں جسکی تشکیلات
میں دلف ہو اور ایک قیمت جو مساوات حج (د) = کی شریط کو پورا کرتی ہو ان نسب ناموں
کو معدوم کردی اور اسطرح سی لائنہا اور غیر لمعین مفاد میں داخل کردی
مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہ حاصل ہے کہ

$$ج (لا د) = ق ج م (لا د) + ح (د)$$

پس اگر ق ایک جملہ صحیح ہی تو وہ کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت د کی جو
حج (د) کو معدوم کرے وہ اوس لاکے قیمت کی ساتھ شامل ہو کر مساوات حج (لا د) =
سی موافق اس کی قیمت کی نکلتی ہی ج (لا د) کو معدوم کرے لیکن اگر ق کسر ہو
اور اوسکی نسب نامہ میں دلف ہو تو جب حج (د) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہو سکتا ہے
اور یہ ضرور نہیں کہ ج (لا د) معدوم ہو جب حج (د) = اور حج (لا د) = یہ صورتیں
اوس حالت میں ہی ہو سکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کریں اور ایسی اجزا و ضربی داخل کریں کہ مثال
مکتوری حج جائیں مثلاً فرض کرو کہ ہم حج (لا د) کو کسی مقدار میں ضرب دیتے ہیں تاکہ ہم اوس
امثال مکتوری حج جائیں جو د کے جملے میں اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$س ج (لا د) = ق ج م (لا د) + ح (د)$$

اب اگر کو مساوات حج (د) = سی دریافت کریں اور پہسا و اس حج (لا د) = سے
دریافت کریں تو جو قیمت اسطرح حاصل ہو لگن وہ ضرور س ج (لا د) کو معدوم کرینگے
مگر ہی یہ نہیں نکلتا کہ ج (لا د) معدوم ہوتا، کیونکہ یہ ہو سکتا ہی کہ جو قیمت د کی ہم نے
لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہو کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جی یہ معلوم ہو کہ کون سی اصل مساوات میں
داخل ہونی کی قابل ہیں اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہیں۔ ہم یہ فرض کرتی ہیں کہ دفعہ
اعظم کی دریا کرتی ہیں حسب دستور اس باب میں احتیاط کی گئی ہی کہ مثال مکتوری واقع ہوں

ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ $a = 1$ اور $b = 1$ ۔ تعبیر کرتے ہیں
 اوسمین نہ ۱ اور نہ ۱ میں کوئی جز فرضی ایسا واقع ہی کہ وہ صرف وہی کا جملہ ہو
 کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جدا گانہ خیال کر سکتے ہیں اور جو حل اوس پر موقوف ہوں وہ دنیا کر سکتے ہیں
 جو ترکیب ہم اب لکھتے ہیں وہ لابیٹی صابا اور سارر صابا فی ایجاد کی تھی اوسکو میر
 جو کوٹ کے جبر مقابلہ سے نقل کرتی ہیں

(۲۷۶) فرض کرو کہ دو متساویاتین $a = 1$ اور $b = 1$ سے تعبیر ہوتی ہیں اور یہ
 بھی ہم فرض کرتی ہیں کہ نہ ۱ ایسا ہی نہ ۱ ایسی ہی کہ اوسمین کوئی جز فرضی ایسا واقع ہو کہ وہ
 صرف وہ کا جملہ ہو اور اس وہ جز فرضی ہی جسکو ۱ میں اسلی ضرب دیتی ہیں کہ وہ ب تقسیم ہو
 فرض کرو کہ خارج قسمت نکلتا ہی اور باقی بچتی ہی جسین رجملہ صرف وہ کا ہی فرض کرو کہ
 اس وہ جز فرضی جسکو ب میں اسلی ضرب دیتی ہیں کہ وہ ب تقسیم ہو فرض کرو کہ اس تقسیم
 کرنی میں ق خارج قسمت نکلتا ہی اور باقی بچتی ہی اور اسین اس صرف وہ کا جملہ ہے
 اسی طرح عمل کئی جاؤ اور تشبہا فرض کرو کہ جو تقسیم پریم کو ایک ایسی باقی حاصل ہوتی ہے کہ
 جسین لا داخل نہیں ہی اور اسکو ہم اس سے تعبیر کرتی ہیں پس متطابق فی ذیل ہم کو حاصل ہونگے

$$\left[\begin{array}{l} s = 1 = q + r \\ s = 1 = q + r \\ s = 1 = q + r \\ s = 1 = q + r \end{array} \right. \quad (1) \dots$$

فرض کرو کہ دو دفعی عظم s اور r کا ہی اور m دفعی عظم s اور r کا ہے اور
 m دفعی عظم s اور r کا ہی اور m دفعی عظم s اور r کا ہے اور m دفعی عظم s اور r کا ہے
 اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ معادلات $a = 1$ اور $b = 1$ کے حل ان نظموں کے
 حل کرنے سے حاصل ہونگے

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0 \text{ اور } 1 = 0 \\ \frac{1}{3} = 0 \text{ اور } 2 = 0 \\ \frac{1}{4} = 0 \text{ اور } 3 = 0 \\ \frac{1}{5} = 0 \text{ اور } 4 = 0 \end{array} \right. \quad (۲)$$

اول ہی ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ تمام حل جو معادلات (۲) سے حاصل ہونگی ان سے معادلات ۱ = 0 اور 2 = 0 کی شرائط پوری ہونگی اور دو ہم یہ ثابت کرینگے کہ تمام قیمتیں جو ۱ اور 2 کی معادلات 1 = 0 اور 2 = 0 کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہ نظم (۲) کے حلوں میں داخل ہونگیں

اول متعلقہ (۱) کے دو اراکان کو دہرے تقسیم کر دو

$$س + ۱ = ۱ \text{ اور } ۲ + ۱ = ۱ \quad (۳)$$

اب بموجب فرض کی ۱ اور ۲ دو جملی صحیحہ کی ہیں پس ۱ اور ۲ بھی جملہ صحیحہ ہوا
لیکن بموجب فرض کی ۱ کا کوئی جز ضربی البتہ نہیں ہے کہ وہ فقط ۱ کا جملہ ہو اس کو پورا کرنا

متعلقہ (۳) سے ثابت ہوتا ہے کہ ۱ اور ۲ کی قیمتیں معادلات ۱ = 0 اور 2 = 0

کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہ ۱ کو معدوم کہیں لیکن ۱ اور ۲ بموجب فرض کے

کوئی جز ضربی رکھتی نہیں اس لیے یہ قیمتیں ۱ کو ہی معدوم کرتی ہیں پس اسی معلوم ہوا کہ معادلات ۱ = 0

اور 2 = 0 کی تمام حل معادلات 1 = 0 اور 2 = 0 کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

اب پہر متعلقہ (۳) کی دو اراکان کو ضرب دو اور متعلقہ (۱) کے دوسرے

معادلات سے ۱ اور ۲ کا مساوی بل حال ہوا اس کو ۱ اور ۲ کی جگہ رکھی تو

$$س + ۱ = ۱ \text{ اور } ۲ + ۱ = ۱$$

جملہ ۱ اور ۲ ایک صحیح جملہ ہی اس واسطے کہ ۱ اور ۲ پوری تقسیم دیر ہوتی ہیں

اور علاوہ بریں یہ جملہ ۱ اور ۲ پوری تقسیم ہوتا ہے اس واسطے کہ ۱ اور ۲ کو تقسیم کرتا ہے

اور ک کو را پور انہیں تقسیم کرتا ہی دم پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای می کے

$$\frac{س}{د} + \frac{ق}{د} = \frac{س+ق}{د}$$
 کے مر کہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س}{د} + \frac{ق}{د} = \frac{س+ق}{د} \quad (۴)$$

اب (۱) کے مطابق مین دوسرے کی دونوں ارکان کو $\frac{س}{د}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{س}{د} \times ۲ = \frac{۲س}{د}$$

چونکہ تقسیم $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ق}{د}$ کو کرتا ہی تو وہ $\frac{س}{د}$ کو بھی تقسیم کریگا لیکن پورا
 دم پر نہیں تقسیم ہوتا ہی اس واسطی $\frac{س}{د}$ پور تقسیم ہونا چاہی دم پر تقسیم کرو اور اختصاراً $\frac{س}{د}$ کی جگہ
 ن اور $\frac{ق}{د}$ کے جگہ ن ار کہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س}{د} \times ۲ = \frac{۲س}{د} + \frac{ق}{د} \quad (۵)$$

(۴) اور (۵) مطابق مین یہ ثابت ہو کہ تمام قیمتیں جولا اور $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ق}{د}$ کو
 معدوم کرتی ہیں وہ $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ق}{د}$ کو فنا کرتی ہیں لیکن $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ق}{د}$ مین کوئی
 جز فی مشترک نہیں اس واسطی تمام حاصل معادلات $\frac{س}{د} = ۰$ اور $\frac{ق}{د} = ۰$ اور $۰ = ۰$
 کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

اب متعلقہ (۴) کی دونوں ارکان کو $\frac{س}{د}$ مین ضرب دو اور $\frac{س}{د}$ کی جگہ اس کا مساوی $\frac{س}{د}$
 جو (۱) کے مطابق مین سی تیسری متعلقہ سی حاصل ہو (۱) مین کہو تو

$$\frac{س}{د} + \frac{ق}{د} = \frac{س+ق}{د} \quad (۶)$$

موجب فرض کی دہ اول رکن کو اس متعلقہ کے تقسیم کرتا ہے اور $\frac{س}{د}$ کو بھی
 تقسیم کرتا ہی اس واسطی $\frac{س}{د} + \frac{ق}{د}$ پورا دم پر تقسیم ہوگا اس خارج قیمت کو ہم
 سے تعبیر کرتے تو

$$\frac{س}{د} + \frac{ق}{د} = \frac{س+ق}{د} \quad (۶)$$

اب متعلقہ (۵) کے دونوں ارکان کو $\frac{س}{د}$ مین ضرب دو اور $\frac{س}{د}$ کی جگہ اس کا

مساوی لہ جو (۱) کے مطابق مین تیسری ہی نکلے دے کر دے

$$\frac{س س اس ۲ ب}{د د ۲} = (ق م ن ۱ + س ۲ ن ۱) + س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱$$

 موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $س ۲$ کے مثال پوری $س ۲$ پر تقسیم ہوتی ہیں اور اس طرح کو
 ق م ہی بغیر کرتے ہیں تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س اس ۲ ب}{د د ۲} = س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ \quad (۷)$$

اب (۷) (۷) کے مطابق بقون سی ثابت ہوتا ہے کہ تمام قیمتیں لا اور $س ۲$ اور $س ۲$ کو معدوم
 کرتی ہیں وہ ان مطابق بقون کی ادل رکن کو یہی معدوم کرتی ہیں لیکن $\frac{س س اس ۲ ب}{د د ۲}$ اور $\frac{س ۲}{د د ۲}$
 کا کوئی جزو نہیں ہے اور اس سے تمام حل معادلات $\frac{س ۲}{د د ۲} = ۱۰$ اور $س ۲ = ۱۰$ کی شرائط کو
 پورا کرتی ہیں وہ معادلات $۱ = ۱۰$ اور $ب = ۱۰$ کی شرائط کو یہی پورا کرتی ہیں

اب سب سے موافق سابق کی (۷) اور (۷) کے مطابق بقون کو $س ۲$ میں ضرب دیتی ہیں
 $س ۲$ کی جگہ اس کا مساوی لہ جو (۱) کے مطابق بقون مین چوتھی سی نکلی دے کر دے
 یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س اس ۲ ب}{د د ۲} = س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ \quad (۸)$$

$$\frac{س س اس ۲ ب}{د د ۲} = س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ + س ۲ ن ۱ \quad (۹)$$

اس میں $س ۲$ اور $س ۲$ جملی صحیح لا اور کے ہیں اب مطابق (۸) اور (۹) سی ثابت ہوتا ہے
 کہ تمام حل معادلات $\frac{س ۲}{د د ۲} = ۱۰$ اور $س ۲ = ۱۰$ معادلات $۱ = ۱۰$ اور $ب = ۱۰$ کی شرائط

اب ہم نے اپنی دعویٰ کا اول جزو ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہو چکے
 وہ معادلات $۱ = ۱۰$ اور $ب = ۱۰$ کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

اب ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ تمام قیمتیں جو معادلات $۱ = ۱۰$ اور $ب = ۱۰$ کی شرائط کو
 پورا کرتی ہیں وہ نظم (۲) کے جملوں مین موجود ہوتی ہیں مطابق (۳) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$ن ۱ - م ۱ = ب = ۱۰ \quad (۱۰)$$

(۴) کو ب میں اور (۵) کو ا میں ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م ا ب - ن ا) + (م ب - ن ا) = ۰$$

اور اسی واسطے بموجب (۱۰) کے

$$(م ا ب - ن ا) - \frac{۲}{۵} = ۰$$

اور اسی واسطے

$$م ا ب - ن ا = \frac{۲}{۵} \quad (۱۱)$$

(۶) کو ب میں اور (۷) کو ا میں ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م ا ب - ن ا) + (م ا ب - ن ا) = ۰$$

اور اسی واسطے بموجب (۱۱) کے

$$(م ا ب - ن ا) + \frac{۲}{۵} = ۰$$

$$اور اسی واسطے بموجب (۱۱) کے \quad (۱۲) \quad م ا ب - ن ا = -\frac{۲}{۵}$$

اور علیٰ ہذا القیاس (۸) اور (۹) سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ

$$م ا ب - ن ا = \frac{۲}{۵} \quad (۱۳)$$

مستطابق (۱۴) بتلارہائی کہ تمام قیمتیں لا اور دیکھو اور ب کو معدوم کرتے ہیں وہ

$$\frac{۲}{۵} = ۰ \quad اور \quad \frac{۲}{۵} = ۰$$

اور میں ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہوا کہ معادلات

$$۰ = ۰ \quad اور \quad ۰ = ۰$$

سے تمام قیمتیں دیکھی جوداخل ہونی کی قابل ہیں انصرا م پاتے ہیں

پس فرض کرو کہ لا = ۰ اور ۰ = ۰ جو معادلات لا = ۰ اور ب = ۰

کی شرائط کو پورا کرتی ہیں

اول فرض کرو کہ صہ ایک قیمت مساوی ۰ = کی ہی تو یہ ظاہر ہی کہ قیمتیں لا = ۰

جاری رہتی کے واسطی ہم $5-11+14$ کو $5-10$ میں ضرب دیتے ہیں اور
اوس پر عمل کر تے ہیں

$$\left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\}$$

اب ہم کیا تو اس آخر سطر کی رقموں کو باقی شمار کریں یا ان کے تقسیم جاری کریں کیونکہ
اوس میں لا کا درجہ مقسوم علیہ سی کم نہیں ہی اگر ہم دوسرے تجویز کو اختیار کریں تو $5-10$ میں
پھر ضرب دیں تو اوسى وہی باقی حاصل ہوگی جو پہلی ہی اصل کو $(5-10)$ کے ضرب دینی سے
حاصل ہوتی پس عمل کو اس طرح جاری کریں

$$\begin{aligned} & - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} \\ & - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} \\ & - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} - \left\{ (5-10) + 14 + 5 \right\} \end{aligned}$$

یہاں ایک باقی لاسی بالکل بی تعلق ہی اور یہ قیمت 100 کی ہی اور یہاں $100 = 100$ پس
حل وہ ہیں جو ان مساواتوں سے انصرام پاتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} & 100 = 100 + 200 - 284 + 12 + 5 \\ & (284) \text{ دفعہ } 284 \text{ کی عمل کی نسبت ہم ان ان باتوں کو کہہ سکتے ہیں کہ} \end{aligned}$$

(۱) ہم ہمیشہ اس اور ر کو ایسا فرض کرتے ہیں کہ انہیں کوئی جز ضربی مشترک نہ ہو سکتا ہے
اگر دونوں اعظم اس اور ر کا ہو تو تقسیم 100 کی ب پر تعمیر مثال مکتوب کے داخل
ہونی کی ہو جائیگی جیسا کہ مستطابقہ (۳) کی غلطیوں سے نہایت سادہ جز ضربی
نہیں جو مضروب فیہ 100 کا پہلی ب پر تقسیم کرنی سی بنا ہی اسی معلوم ہو کہ نہایت سادہ
جز ضربی فرض کرنی سی ہم $100 = 100$ کے بناتے ہیں

اور علی بن القیاس اس اور 100 - ایسی ہیں کہ اس اور ر کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے

حاصل ہوتا ہے پس

$$r = 5\lambda + (2+3)\lambda - (2+3+4+5) = 5\lambda - 10$$

تقسیم دوم کرنی کے واسطی مقسوم کو دین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد پھر دین ضرب
تاکہ تقسیم جاری رہی باقی $5\lambda - 10$ کے واسطی $2+3+4+5 = 14$ حاصل ہوگا
اب $5\lambda - 10$ پر تقسیم کرو تو خارج قیمت $5\lambda + 3 + 4 + 5 = 12$ ہوگا اور باقی نہیں ہے

پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوی واحد $5 = 5$ سی جو بی شمار قیمتیں لا اور
۵ کی حاصل ہوتی ہیں اور شامل ہیں (۲) اور ان محدود حصوں شامل ہیں جو ان معادلات کی حل
کرنے سے حاصل ہوتی ہیں کہ

$$2+3+4+5 = 10 \text{ اور } 5\lambda + 3 + 4 + 5 = 10$$

سوم دفعہ ۲۷ کا ثبوت فرض کرنا ہی کہ لا اور محدود ہیں مگر یہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی
حل بی شمار ہوں مثلاً فرض کرو کہ $(5-1)\lambda - 2 = 2+3+4+5 = 10$ پس جب تک کہ برابر
واحد کے نہ ہو تو اس مساوات درجہ دوم ہی دو محدود قیمتیں انصرام باقی ہیں اگر انتہایت درجہ
اکی ہوگا تو ایک قیمت لا کی بی نہایت زیادہ ہوتی ہے بائیسواں باب جبر بمقابلہ کا دیکھو

پس جب $5 = 10$ تو ہم کہتے ہیں کہ لا کی انتہایت قیمتیں ہیں

ہم فی دفعہ ۲۷ کی تحقیقات میں ایسی لا اور کی غیر محدود قیمتیں نہیں فرض کی ہیں
اور یہ علیحدہ بحث ہو سکتی ہے مثلاً اگر ہم یہ تحقیق کرنا چاہیں کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود
داخل ہونی کی قابل ہے تو ہم $\frac{1}{2}$ بجای لا کی رکھیں اور مساوات کو کسری خالص کریں
اور فرض کریں کہ $5 = 10$ تو اب ہم کو دو مساواتیں ۵ کی حاصل ہونگیں اور اگر اوٹکی
ایک قیمت یا کسی قیمتیں مشترک ہونگیں تو اس قیمت یا ان قیمتوں کو مع غیر محدود قیمت لا کے
معادلات مفروضہ کی شرائط کا پورا کرنی والا

تیسواں باب ایک جملہ کا تسلسلہ میں پہنچنا

(۲۷۹) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ دو سین درم و قنادیر مجموعاً لا اور مخلوط ہیں پس اگر ہم مساوات کو حل کر کے قیمتیں دے کی لا کی رقموں میں دریافت کر سکیں تو دے کی ایک قیمت کو سلسلہ قواد میں معلوم کر سکیں گی اور اب ہم دے کی قیمتوں کی پہلانی کی ایک ترکیب لکھتی ہیں اور اسی پہلی دے کی قیمتیں محدود رقموں میں نہیں دریافت کر سکیں گی

اس ترکیب کو لا اگر اثر نہی ایجا دکیا ہتا یوٹن حسب کاجو متوازی الاضلاع مشہور ہے اوہین ہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس سکہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح پیدا ہوا اور کس نے ایجا دکیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن حسب کی تحریر کو اس باب میں دیکھیں

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

$$= \dots + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

کے بغیر ہونی ہی اس میں اڑوں ... ک ... صی تمام حملی لاکے ہیں
اور ہم فرض کرتی ہیں کہ وہ ... کہ ... بہ ترتیب تناز ملی مفادیر جبر یہ کی
لکھی ہوئی ہیں اور تمام تحقیقات جہاں ہم سڑایا بہت بڑایا چھوٹا یا بہت چھوٹا مفادیر کو لکھا ہے
وہاں ان کی معنی جبر یہ لئے ہیں

فرض کرو کہ ۱ درجہ کا یعنی ۱۸۰ کوئی بڑی قوت لاکھی ۱ میں نہیں واقع ہوتی
اور ۲ ب درجہ کا ہی . . . ک ک درجہ کا اور . . . ص ص درجہ کا
بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کریں

(۲۸۱) مطلب ہمارا یہی کہ وہ سب طریقہ دریافت کرن جسکی موافق قیمت طاقی ایسی دریافت کرنا کہ سلسلہ ارقام ذیل میں دو یا زیادہ رقمیں برابر باہمی باقی رقموں میں کسی ایک رقم ہی ہو

1 + صه ط ب + صه ط . . ک + کړط . . ص + قوط

اول مکتوفرض کرو کہ + صہی تو اول رقم باقی ارقام میں سی ہریک سی بڑی ہوگی اور جب ط گھٹتی ہے تو ہریک رقم گھٹتی ہی لیکن ہریک نسبت اپنی ماقبل کے رقم زیادہ

اسیستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ ۱ + س ط اول برابر ارقام مابعد میں سی
ایک ما کی ایک برابر ہو اور قیمت اس طرح حاصل ہوگی کہ معادلات ذیل میں سی ط کی سب سے
بڑی قیمت دریافت کریں

$$۱ + س ط = ب + ص ط اور ۱ + س ط = س + ل ط \quad ۱۰۰۰ + س ط = ک + ک ط \quad ۱۰۰۰ + س ط = ص + ق ط$$

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

$$\frac{ب - س}{س - ص} \quad \text{و} \quad \frac{س - ل}{ل - ک} \quad \text{و} \quad \frac{ک - ص}{ص - ق}$$

فرض کرو کہ $\frac{ب - س}{س - ص}$ ان قیمتوں میں سب سے بڑی قیمت ہی اگر ایک قیمت بڑی دوسری ہی ہے
یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی میں سی بہ نسبت کسی کے ہو تو $\frac{ک - ص}{ص - ق}$ کو اونچین
آخر فرض کرو اور $\frac{س - ل}{ل - ک}$ کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ کم مرسی ہوتا جا ہی یہاں تک کہ ک + ک ط اول برابر ایک یا کئی ایک کے
ارقام مابعد میں سی ہو ہی قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل میں ط کی سب سے بڑی قیمت
لینی سے دریافت ہو سکتی ہے

$$ک + ک ط = ل + ل ط و ک + ک ط = م + م ط \quad . . . ک + ک ط = ص + ق ط$$

یعنی سب سے بڑی قیمت اس سلک میں سی لینی جا ہی کہ

$$\frac{ل - ک}{ک - م} \quad \text{و} \quad \frac{م - ل}{ل - ک} \quad \text{و} \quad \frac{ک - ص}{ص - ق}$$

فرض کرو لا اونچین سی سب سے بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک قیمت بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی
ایک بڑی بہ نسبت اور دن کی ہو اونچین سی سب سے آخر رقم منتخب کجا ہی فرض کرو کہ مر قیمت
اس منتخب رقم کی ہی جو $\frac{ک - ل}{ل - م}$ فرض کجا ہی

فرض کرو کہ ط پر کم مرسی ہوتی جا ہی اور موافق سابق کی عمل کر کے مر کو معادلات ذیل سے دریافت کریں

$$ن + س ط = ع + ع ط \quad . . . ن + س ط = ص + ق ط$$

یہی عمل جاری رہی جب تک کہ رقم ص + ق ط قیمت ط کی دریافت کرنے کے لئے کام آئی

پس اسی ہم دیکھتی ہیں کہ ط کی تمام مناسب قیمتیں دریافت ہو گئیں
(۲۸۲) اب فرض کرو کہ $1 = (1 + 1) + 1$ آئیں 1 بے لگاؤ لاسی ہی اور 1 جب لانا نہ ہو

معدوم ہو جائیگا اور اس طرح فرض کرو کہ $1 = (1 + 1) + 1$ اور علیٰ ہذا القیاس

فرض کرو $1 = (1 + 1) + 1$ آئیں تو بے لگاؤ لاسی ہی اور جب لانا نہایت متواہی تو کو

معدوم ہوتا ہی پس مساوات مفروضہ کو جسمیں لانا اور ملحق ہن بہ قیمتیں مندرجہ کرو تو

$1 + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$

$1 + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$

چونکہ ہم مساوات لاکے سب قیمتوں پر حاوی ہی آسکتے وہ لاکے لانا نہایت قیمت پر ہی حاوی ہوگا

اور یہ صورت نہیں واقع ہونی کی اگر داکے سب ہی اعلیٰ قوت صرف ایک رقم میں ہی واقع ہوں طلب کو

یون ہی بیان کر سکتی ہیں کہ ہم مثال لاکے اعلیٰ قوت کا معدوم ہوں ہی بات ہی حکم سبب تحقیقات قوت

گذشتہ کا استعمال ہو سکتا ہے

بموجب فرض کی مر سب ہی بڑی قیمت ط کی جو دخل ہو سکتی ہی اور مساوات بالاکے دائیں طرف جو جملہ

کا حصہ ایسا لکھا ہی کہ جسمیں لاکے اعلیٰ قوت منف ہی یہ ہے کہ

$1 + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$

جب لانا نہایت ہو تو مثال $1 + 1 = (1 + 1) + 1$ مساوات ہی بات ہی یہ مساوات کی قیمت

دریافت کرنے کے واسطی حاصل ہوتی ہے کہ

$1 + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$

اس مساوات سی لو کی قیمتیں دریافت ہو گئیں اور ہر کو کی قیمت کی موافقہ کی قیمت حاصل ہوگی

جسمیں رقم لاکے اعلیٰ قوت رکھتی دانی کو لا ہوگی

اور اسی طرح سی مر سب قیاس کر کے مساوات ذیل کو کے تحقیق کرنی کے واسطی حاصل ہوگی کہ

$1 + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$ $(1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1$

اس سلسلہ میں قوت لاکے رکھنی والی لاکے ہوگی

پس سطح عمل کرنے سے ہم کی ہر قیمت میں اعلیٰ قوت لاکے دریافت کرتے ہیں
اب پھر اور لاکے متناظر قیمتوں کا ایک زوج مستحصلہ کام میں لاؤ اور

$\Delta = (لو + جی)$ اور Δ کی اس قیمت کو اصل مساوات میں جبین لا اور ملحقہ ہیں

مندرجہ کرو تو سطح ایک مساوات حاصل ہوگی کہ جبین لا اور لاکے اور مقادیر معلومہ متعلق ہوئیں

اب وہ ترکیب کام میں لائیں جس سے کہ لاکے قیمتوں میں لاکے اعلیٰ قیمتیں دریافت ہوں

پس سطح سے دوسری قیمتیں لاکے قیمتوں کی صورت مفصلہ کی سلسلہ کی دریافت ہوئیں

جبین لاکے قیمتوں میں ترتیب تنازلی ہوگی اور اس عمل کو جہاں چاہیں جاری رکھیں

(۲۸۳) ترکیب مذکورہ کا اقتضا یہ نہیں ہے کہ قوت سے دھبہ... قدر اور ب... ص

اعداد صحیح ہوں مگر اس کتاب میں جس قسم کی مساواتوں کا ذکر ہے انکی اول رقموں کی دریافت کرنی ہیں

جب اس ترکیب کا استعمال کریں گے تو وہ اعداد صحیح ہوئیں گے

اب ہم اس ترکیب کا استعمال ایک مثال میں کرتے ہیں

فرض کرو کہ یہ مساوات ہو کہ

$$\Delta = (لو + جی) + (لو + جی) - (لو + جی) = ۳ + (لو + جی) = ۳ + ۳ = ۶$$

اسی طرح ارقام $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ کی اس صورت میں یہ ہے کہ

$$\frac{2-3}{2-4} \text{ و } \frac{3-5}{1-4} \text{ و } \frac{4-6}{2-4} \text{ اب انہیں سی دوسری اور تیسری رقم برابر ایک}$$

کے ہی جو بہ نسبت $\frac{1}{2}$ کی بڑھی ہے اور یہ قیمت اول رقم کی ہی پس مر = ۱ اسی معلوم ہوا

$\Delta = (لو + جی)$ رکھو اور ہر مساوات مفروضہ میں رکھو تو سب اعلیٰ قوت لاکے لائے

اور رقم جبین وہ ملحق ہے یہ ہے کہ

$$\Delta = (لو + جی) - (لو + جی) + ۳ = ۳ + (لو + جی)$$

پس جب لا لا نہایت کو یہ مثال معدوم ہونی چاہی اور ہی یہ حاصل ہوتا ہے
 کو - ۱۷ + ۳ = ۰

اب یہ ظاہر ہے کہ کو = ۱ ایک حل ہی اور جملہ مشتق ۱۷ - ۱۷ بھی معدوم ہوتا ہے جب کو =
 ثبوت ایک اتنی ہے

کو - ۱۷ + ۳ کو (۱ - ۱) پر تقسیم کرو تو خارج قسمت کو + ۲ کو + ۳ حاصل ہوگا
 پس اور قیمتیں کو کی مساوات کو + ۲ کو + ۳ = سے حاصل ہوں گے اور وہ

۱ - ۸ = ۳ ہیں پس اب یہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ مساوات مفروضہ سی دو حقیقی قیمتیں کی
 ارقام میں حاصل ہوں گے اور لا اول رقم ان قیمتوں میں ہی ہر ایک قیمت میں اوستو ہوگی
 کہ وہ لا کی قوا و متنازلہ کے سلسلہ میں بیان کیجائی

اب ہم لا (۱ + کو) کو کی جگہ مساوات مفروضہ میں رکھو اور کو کی قیمتوں کو دریا کرو
 بالفعل ای مثال کو دوبارہ فرض کریں گے

(۲۸۴) دھات ۱۲۸۱ اور ۲۸۲ میں نتائج قبل حاصل ہوتے ہیں

(۱) اگر ۱ + ۳ + دب + ۳ + ک + کد + ص + قد سب برابر ہوں
 تو مقدار مرد و مر + سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقدار ۱ + ۳ + دب + ۳ + ک + کد + ص + قد

میں سی دو یا زیادہ برابر ہوں اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہوں تو واحد سلک
 مرد و مر + ۳ میں واقع ہوگا اس واسطی ظاہر ہے کہ ط = ۱ ایک مناسب قیمت
 تحقیقات ۲۸۱ میں ہی کیونکہ یہ قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت
 باقی ارقام کے بناتی ہے

جبر یہ خط و مسخ کی خطوط مستقیمہ متع الملاقات کا ضابطہ ان دو تو نتائج میں ملتا ہے
 باقی ارقام میں ہم ۳ + ۳ + ۳ کو صحیح فرض کرتی ہیں اور نہ کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ میں اول مساوات لکھی ہے۔ کہ قیمتیں رکھتی ہیں اور دوسری مساوات کی کہ۔ سد قیمتیں اور علی ہذا لقیاس میں اجمال ہم کو ہم قیمتیں کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہیں اور یہی ہونا چاہی تھا اسلئے کہ مساوات کی سہ درجہ کی ہے

(۴) فرض کرو کہ تمام جملہ لاکہ سی ل تک برابر ہیں اور اعلیٰ درجہ کی بہ نسبت اور ان کے ہیں تو وہی قیمتوں میں ہے۔ کہ قیمتیں ہو لگین جو لاکہ قیمت قوت سے شروع ہوتی ہیں اور کہ۔ سہ قیمتیں ہو لگین جو صفر قوت سے لاکہ شروع ہوتی ہیں اور قیمتیں جو لامنتفی قیمتوں سے شروع ہوتی ہیں اسو اسطی کہ کہ۔ سد قیمتیں کی ہیں جو لاکہ صفر قوت سے شروع ہو کر صعود کرتی ہیں اس سبب کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰ تمام ارقام ذیل

کہ + کہ ط دل + ل ط ۰۰ ن + سد ط کو برابر اور ہر کسی قسمی جو ان کی الگی ایسی بناتی ہے سہ۔ کہ قیمتیں کی جو لاکہ قیمت قیمتوں سے شروع ہو کر صعود کرتی ہیں اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتیں ط کی اور ان کی موافق قیمتیں تو کی ہیں جو قوت نمایاں سے

سہ و ص ۰۰۰ کہ کے لعلق سے حاصل ہوتی ہیں اور سد قیمتیں کی لاکہ منفی قوتوں سے شروع ہوتی ہیں اور صعود کرتی ہیں اور یہ صعود ط کی منفی قیمتوں سے اور ان کی موافق تو کی قیمتوں سے جو قوت نمایاں سے ۰۰۰۔ قدری حاصل ہوتی ہیں ہوتا ہے اور اس میں قدر =

(۵) ۱ دل و ۰۰۰ ص تمام اکتھا لدرجہ ہیں اور سہ اعلیٰ درجہ بہ نسبت بالقی کے رکھتا ہے سہ۔ لب قیمتیں کی ہیں جن میں اعلیٰ قوت لاکہ مثبت قوت نما

۲۔ لب ہی اور کی لب قیمتیں ہیں جن میں اعلیٰ قوت لاکہ منفی قوت نما۔ ۱۔ لب سے

(۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ میں جب مساوات کو کی حاصل ہوتی ہے اور اسی کی قیمتوں کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہیں اس سبب ایک بات ہم کہتی ہیں فرض کرو کہ ۱ = لا (لو + جو) آئین لو اور ط معلوم ہیں اس کی قیمت کو مساوی مفروضہ میں بتدريج کرو اسطی کہ مساوی مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اکثر وہی قیمتوں میں بعض اصل معنی کی قابل ہو لگین اسو بموجب فرض کہ معدوم ہوتا ہی جب لا لا نہایت ہو

پس وہ قیمتیں کی جولا کی قیمت قوت سے شروع ہوتی ہیں یا لا کی صفر قوت سے
اونکو مسترد کرنا چاہی یہ لو کی مسترقیتیں کی اور قیمتوں سے متعلق ہونگے جسے
کہ بالفعل ہم کو کچھ تعلق نہیں ہی کیونکہ ہر وقت ہم باتوہ خاص قیمت کی تلاش کر
رہے ہیں جو لوٹا سے شروع ہوئی یا خالص قیمتوں کی تلاش کر رہے ہیں جو اسطرح شروع ہوتی ہیں

اور ایک ہی زیادہ ہیں اور جنہیں لو اور ط کی معلوم قیمتیں ہیں

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لو کی جگہ لا (لو + ٹی) اور لو = ۱

کے فرض کرو تو لا پر تقسیم کرنے کے بعد یہ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\text{کو} (لا - ۰۰۰) + \text{کو} (۰۰۰ لا ۴) + \text{کو} (۰۰۰ لا ۱۰) - لا ۲ = ۰$$

یہاں لو کی مثال میں علی قوتیں لا کی بیان کر دیں اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سے پہلے چل ہوتا ہے

$$\frac{۵-۴}{۲-۴} \text{ د } \frac{۵-۴}{۱-۴} \text{ د } \frac{۵-۵}{۲-۴} \text{ د } \frac{۵-۵}{۳-۴}$$

یہاں اول دو قیمتیں صفر ہیں اور جبر بمقابلہ کی اعتبار سے بڑی بہ نسبت اور وک کے ہیں لیکن

صفر قیمت مسترد ہونی چاہی جسکا بیان دفعہ بالا میں کیا گیا ہے اسطرح دفعہ ۲۸۱ کی طرح

پہر ہم عمل کریں اور فرض کریں کہ مر = ۰۔ اب ہم کو مر دریافت کرنا ہی

اسو اسطرح یہ کس میں بنائی جائیگی

$$\frac{۵-۴}{۲-۴} \text{ د } \frac{۴-۵}{۱-۲}$$

انہیں سے دوسری - ۱/۲ ہی اور جبر بمقابلہ کے لحاظ سے بڑی پس کے موافق ہم کو = لا

اور مساوات ۴ لا - ۲ = ۰ سے قیمت لو کی دریافت کرتی ہیں پس لو = ۱/۳

پس اصل رقم لو کی ۱/۳ یا - ۱/۳ ہے اسو اسطرح جہاں تک ہم فی عمل کیا ہے

$$۵ = لا (۱ + \frac{۱}{۳}) + (۰ + \frac{۱}{۳}) یا ۵ = لا (۱ - \frac{۱}{۳}) + (۰ + \frac{۱}{۳})$$

(۲۸۷) لو کی قیمتوں کی صفت مساوات عامہ لو کی بناوٹ کی امتحان سے معلوم ہو سکتی ہے

اول فرض کرو کہ بجای کی لا اور کہیں اور پر لو کو لو + کوئی تبدیل کریں جب ہم کی جگہ لا کو

پس اگر ہم اپنی تیاج کو علم ہندسہ کی موافق بیان کریں اور خطوط سختی جو کی اون قیمتوں کی موافق کہ قوائے لائیں بیان ہوئی ہیں مرتب کریں تو اول رقم اور سلسلہ کی جو قیمت کی دسویں ہم فی دریافت کی ہی اوسی صفت ذاتی خط سختی کی مبدی ہی بہت فاصلہ پر معلوم ہوگی لیکن بہتر ترکیب اس طرح بھی استعمال میں آسکتی ہے کہ قیمتیں کی موافق قوائے متصاعہ کے دریافت کریں تو قیمت کی اول رقم صفت ذاتی خط سختی کی جو مبدی ہی بہت قریب بتلائے تاکہ وہ قیمتیں قوائے متصاعہ لائیں دریافت کرنی کی ترکیب کو استعمال میں لائیں یہ بتلائی ہم کو کرنی چاہی کہ اول سے دسہ ... قد کو بہتر ترتیب بقاعدی بلحاظ مقدار جبرہ کی لکھو اور ۱ معذورم ہوگا جب لامعدوم ہوگا وہ لاکہ لائے نہایت ہونی ہی معلوم نہیں ہوگا پس لائے سب سے ادنی درجہ قوت کی ۱ میں ہو تو موافق سابق کی وہ سب سے اعلیٰ قوت نہیں ہوگی اور اسی کی متماثل تبدل ب اور ب میں اور باقی اور متماثل مقدار میں کو

پس جب + صہ ہی تو مقدار ذیل

۱ + سہ ط د ب + صہ ط . . . ک + کد ط . . . ص + قدط

میں ترتیب بقاعدی بلحاظ مقدار کے ہوگی

موافق سابق کی سب سے بڑی قیمت ط کی ان مساواتوں سے دریافت کرو کہ

۱ + سہ ط = ب + صہ ط ۱ + سہ ط = س + ل ط ۱ + سہ ط = ک + کد ط ۱ + سہ ط = ص + قدط

چوبیسواں باب مسائل متفرقه

(۲۸۹) اس باب میں معادلات کی مسائل متفرقہ نہایت دلچسپ اور بہت بکار آمد لکھینگے اور اوس کے صفحہ میں جو اصول لکھی ہیں اون کی توضیح اور تشریح خوب ہوگی گویا یہ مسائل اون اصول کی مثالیں ہیں

ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{r}$$

کی کوئی خیالی قیمت نہیں ہوتی اگر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ $C + Q = A$ ایک قیمت ہی تو
 $C - Q = B$ آہی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتوں کو متواتر مساوات بجای لا کے
 لکھو اور حاصل اس میں تفریق کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ $C = \frac{A+B}{2}$ ۲

لہذا اور باقی اسی طرح لکھ کر لو یہ حال ہوگا کہ

$$= \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \dots \right] x$$

اور یہ نہ ماکر ہی اگر ق = کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اس طرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو مح (لا) سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ (اوب دس)۔ کہ مقدار چربہ بہ ترتیب بقا عیدی میں جب لاکچہ بی بڑا بہ نسبت (اے) ہو تو مح (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور نسبت ہوگی اور لاک کی (اکی) ساتھ قربت کافیہ فرض کر کی ہم مح (لا) کی نسبت قیمت قطعی حاصل کر سکتی ہیں اور جب لاکچہ بی کم ہی ہو تو دوسرے رقم مح (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لاک کی ب کے ساتھ قربت کافیہ فرض کر کی ہم مح (لا) کی منفی قیمت حاصل کر سکتی ہیں پس لاک کی (ا) اور ب کے درمیان بعض قیمت مقرر کرنی سی مح (لا) علامت بدلتا ہی اور اس طرح ب اور س کے درمیان لاک بعض قیمت مح (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علیٰ ہذا القیاس اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات مح (لا) = کی سب قیمتیں حقیقی اور غیر مستساوی ہیں مساوات مح (لا) = کی جو صورت ہی اسی بہت اسان مساوات کی خاصیت جسکا اوپر بیان ہوا اسانی سی ثابت ہو سکتی ہی ظاہر ہی کہ اگر مساوات کو کسور سی خالص کر کے اصلی گینڈی کی صورت میں مساوات کو بدل لین تو کچھ ہماری نتیجہ نکالتی پر اثر نہیں ہوگا یعنی اگر بجای مساوات مح (لا) = کی یہ مساوات بنالین کہ

مح (لا) (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ... (لا - ک) =

تو کئی نتیجہ میں فرق نہیں آئے گا اور ثبوت ظاہر ہو جائیگا

(۲۹۰) ان مفادیر لاء ولام ولام . . . لان کی قیمتیں ان معساواتوں سے درپا کرو

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = A$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n =$$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1$

$$b = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

[illegible]

$$= (1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} - \frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{n+1}} - \frac{1}{n^{n+2}} + \dots)$$

سن - وسن - سن . . . سوس کے باب میں جو فرض کیا ہی اویس یہم اخراج ہو تا ہے
کہ اس واسطے . . . ان قیمتیں مساوات

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$$

کی ہیں اس سبب دیکھیں ظروف مساوات کی ازرومی تطابق برابر

(ی-۱۴) (ی-۱۳) . . . (ی-۱) (ی-۰)

اسی معلوم ہوا کہ لار کو بجای ہی کی مسوات میں رکھیں جسی لام معین ہونو
لار اس صورت میں نمایان ہوگا کہ

$$= (p_1 - 1) \cdots (p_{r-1} - 1) (p_r - 1) \cdot$$

پس لام معلوم ہو گیا اور لام ولسم . . . لان کو قرینہ سی دریافت کر سکتے ہیں
(۲۹۱) ن تھا دیر لاوی . . . ان مساواتوں سے دریافت کرو

$$1 = \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3}$$

پس مجموعہ دفعہ ۴۵ کے قیمت عام کی ہم کو دریافت کرنی ہے (۱) میں

لا کو لیس سے بدل دو اور سن میں ضرب دو تو

$$(لا + سن) (لا + سن) \dots (لا + سن + ۱) = لا + ع + س + لا + ۱ + ۰۰ + ع + ۱ + سن + لا + ۱$$

(۱) اور (۲) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(لا + سن + ۱) (لا + ع + لا + ۱ + ۰۰ + ع + ۱ + سن + لا + ۱) =$$

$$(لا + سن) (لا + ع + س + لا + ۱ + ۰۰ + ع + ۱ + سن + لا + ۱)$$

اس مطابق کی دو نو رکٹوں میں مثال لا - م + اکو اسیس برابر لکھو تو

$$ع + م + سن + ۱ + ع + م - ۱ = ع + م + س + ۱ + ع + م - ۱$$

$$\text{اسی طرح } ع + م = \frac{سن (سن - ۱ + ۱) + ۱ - ۱}{(۳) \dots}$$

$$\text{اور } ع + م = س + س + ۱ + سن = \frac{سن (سن - ۱) + ۱ - ۱}{۱ - سن} \text{ تو بواسطہ (۳) کے}$$

ہم عام اور عام دفعہ ۴۵ کو تو معلوم کر سکتے ہیں اور اسی ہم کو قیمت مطلوب عام کے

حاصل ہو جائیگی

(۲۹۳) فرض کرو کہ ادب وس ۰۰۰ بقادیر میں اور سن او نکا مجموعہ ہے

سن ۱۔ مجموعہ او نہیں ن۔ مفادیر کا ہی اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ حج

$$(صن - حج) (صن - حج) + حج (صن - حج) + ۰۰۰ + حج (۱ - سن) + حج (صن - حج)$$

تعبیر کرتا ہی یہاں حج (صم) مجموعہ ایسی ارقام کو تعبیر کرتا ہی جیسی کہ (صم) رقم جو بقادیر

ادب وس ۰۰۰ میں ہی م مفادیر کے ممکن امتحانات سی بنتی ہی تو اب ہم یہ ثابت

کرینگے کہ اگر چہ چوٹان سی ہو تو صح = ۱ اور اگر ن برابر یا بڑا نسبت ن کی ہی تو صح پورا

ادب س ۰۰۰ پر تقسیم ہوا اور خاص کر

$$\text{صح} = \frac{لا + سن}{۲} \text{ ادب س } \dots \text{ جب } ر = ن$$

$$\text{اور } حج = \frac{لا + سن}{۲} (لا + ب + س + ۰۰) \text{ ادب س } \dots \text{ جب } ر = ن + ۱$$

دوم فرض کرو کہ $r = n + 1$ تو صحیح پورا اب س... پر تقسیم ہوگا اور چونکہ صحیح $n + 1$ درجہ کا ہی تو اوسکا ایک جز فرضی ایک درجہ کا ہو جو بلحاظ اب و ب وس... ایک قرینہ رکھتا ہوگا اسواسطی بہم جز فرضی $1 + b + s$ ہوگا اسی معلوم ہوا کہ صحیح = لب اب س... $(1 + b + s) + \dots$ اسین لب کوئی عددی مقدار ہی اوسکا تشخیص کرنا چاہی اب کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ اب و ب وس... وغیرہ میں ہر ایک برابر واحد کے ہے تو

صحیح = $\frac{n}{2 \times 1} (1 - n) + \frac{n}{2 \times 1} (1 - n) + \dots$ اور بہم برابر لب n کے اسی معلوم ہوا کہ موافق باب ۳۴ باب جز مقابلہ کے لب = $\frac{n}{2}$ (۲۹۴) فرض کرو کہ $[s]$ تعبیر $(s - 1) (s - 2) \dots (s - n + 1)$ کو کرتا ہے اور s خواہ کچھ ہی ہو تو

$$[a + b] = [a] + [b] + \frac{n}{2 \times 1} [a] + \dots + [b] + \dots + [a]$$
 اسواسطی کہ فرض کرو مثبت صحیح مقدار ہی تو بہم ہم کو معلوم ہی کہ بہم مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ $(a + 1) + \dots + (a + 1)$ اور $(a + 1) \times \dots \times (a + 1)$ میں مثال لاکے مساوات سی بہم نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں کی واسطی ہی بہم مسئلہ از روی تطابق کے بموجب دفعہ ۳۴ کے صحیح ہی یعنی جب a کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتوں کی صورتیں مسئلہ صحیح ہے اور چونکہ کوئی مثبت صحیح کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ a کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں کی واسطی صحیح ہی اور بہم اسطی بموجب دفعہ ۳۴ کے وہ a کی تمام قیمتوں کے واسطی غرض یہ مسئلہ اسطرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نام کی صورت میں فرض کر لیں اور بہر دفعہ ۳۴ کی ضابطہ کو بھی صحیح مان لیں اس مسئلہ کا نام کہی ٹیٹوڈ ہی لیا جاتا ہی جب فولر کا ضابطہ ثنائی اوس حالت میں ثابت کرتے ہیں کہ قوت نما

لکھی ہو تو اس مسئلہ کا دیاں کام پڑتا ہی اور یہ بات مشہور ہی اور دیاں اس مسئلہ کو موافق اصولی تغیر صورتیہ کے قائم کیا ہے

(۲۴۵) فرض کرو کہ مساوات $(\lambda) =$ کی ایک قیمت λ ہی تو ہم فرض کر سکتی ہیں کہ

$$\text{مح } (\lambda) = (\lambda - 1) \text{ مر } (\lambda)$$

$$\text{مح } (\lambda) = \frac{(\lambda)}{\lambda} = (1 - \frac{1}{\lambda}) \text{ مر } (\lambda)$$

$$\text{لوک } (\lambda) = \frac{(\lambda)}{\lambda} = \text{لوک } (1 - \frac{1}{\lambda}) + \text{لوک } \text{مر } (\lambda)$$

$$= - (\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \dots) + \text{لوک } \text{مر } (\lambda)$$

فرض کر دو کہ لوک $\frac{(\lambda)}{\lambda}$ کو ایسی سلسلہ میں پہلا ہیں کہ او میں λ کی مثبت اور منفی قوا ملتی ہوں

اور لوک $\text{مر } (\lambda)$ کو ایسی سلسلہ میں پہلا ہیں کہ او میں صرف λ کی مثبت قوتیں ہوں

تو ہم مساوات کی دونوں اکان کا تطابق فرض کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{(\lambda)}{\lambda} \text{ کی جو صورت مقصد لوک } \frac{(\lambda)}{\lambda} \text{ میں ہوں}$$

(۲۴۶) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرقی حساب فی اپنی رسالہ مسائل معادلات میں لکھا ہے

اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر منہا ہی صورت مقصد کا انفرجی ہو سکتا ہے

اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابوں میں بحث لکھی ہے

(۲۴۷) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$$\frac{a}{b} + s - \lambda = b =$$

$$\text{بیان مح } (\lambda) = s - \frac{a}{b} + \frac{1}{\lambda} -$$

$$\text{لوک } \frac{(\lambda)}{\lambda} = \text{لوک } s + \text{لوک } (1 - \frac{a}{s\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + \dots)$$

$$= \text{لوک } s - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + \dots$$

$$\text{اس میں } \frac{1}{\lambda} = \frac{s}{s} - \frac{a}{s} = \frac{s - a}{s} = (1 - \frac{a}{s})$$

اب ہم کو اوں ارقام کا التفاظ کرنا چاہیے جس میں $\frac{1}{\lambda}$ ملتی ہو تو ہم ایک ایسی رقم

فرض کرو لا = اسی تمام ارقام بائیں طرف معدوم ہو جاتی ہیں الا وہ مقدار جس میں
ملحقہ ہی اور ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مر (ا)} = \left[\frac{\text{مر (لا)}}{\text{لا} - \text{لا}} \right] \text{ا} = \text{لا}$$

یعنی بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$\text{مر (ا)} = \text{ارج (ا)}$$

اسی ا قطعی دریافت ہوتا ہی اور سطح قیمتیں اوب دس - ک کی دریافت ہوتی ہیں
(۳۰-۱) اب فرض کرو کہ مر (لا) درجہ ادنی کا بہ نسبت حج (لا) کے نہیں ہے
تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مر (لا)}}{\text{حج (لا)}} = \text{ح (لا)} + \frac{\text{ارج (لا)}}{\text{حج (لا)}}$$

اس میں ح (لا) اور ح (لا) جملی صحیحہ لاکھی ہیں اور ح (لا) کا درجہ ادنی بہ نسبت
حج (لا) کے ہی اب $\frac{\text{ارج (لا)}}{\text{حج (لا)}}$ موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسور جزئیہ میں کریں
چونکہ ہم کو یہ معلوم ہے کہ

$$\text{مر (لا)} = \text{ح (لا)} + \text{ارج (لا)}$$

اسی بہ استخراج ہوتا ہی کہ مر (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی قیمت ہی جب حج (لا) معدوم ہو
اسی معلوم ہوا کہ کسور جزئیہ مطابق $\frac{\text{ارج (لا)}}{\text{حج (لا)}}$ کی تشخیص موافق دفعہ ۲۴۴ کے ہو سکتی ہیں
پہلی اسی کہ ہم مر (لا) کو حج (لا) پر تقسیم کریں اگر حج (لا) کی کامل قیمت دریا کرنی ہوتی تو
ہم کو جزیع (لا) کو ساقط کرنا نہ چاہی ہوتا

(۳۰-۱) ختم نتائج کو وقت سی ظالی کرنی کی لئی دفعات گذشتہ میں کسرا طے کے تحلیل کرنے
کا طریقہ کسور جزئیہ میں اوس صورت میں بیان کیا ہی کہ اون میں اجزاء ضربی مکرر نہیں اتے
یہ ایک خاص صورت تھی اب ہم علی العموم اسکی تحقیقات کرنے ہیں
(۳۰-۲) فرض کرو کہ حج (لا) ایک جملہ لا کا ہی جس میں اجزاء ضربی مکرراتی ہیں مثلاً فرض کرو

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} \quad \text{ب} + \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} \quad \text{س} = \frac{1}{1-1}$$

یعنی لا کو بڑا واحد سے فرض کر کے

$$\left[\frac{1}{1-1} + \text{ب} \right] - \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} \quad \text{لا} - \text{س} + \text{س}$$

مثبت ہے یعنی پھر بڑی اولی مثبت ہے جب

$$\left[\frac{1}{1-1} + \text{ب} \right] - \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} \quad \text{لا} - \text{س} + \text{س}$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ $\text{ب} = 10$ اور س تعداد سے بڑا منفی مثال ہی توح (لا) مثبت ہے

اگر $\frac{1}{1-1} - \text{س}$ صفر یا مثبت ہی یعنی اگر $\frac{1}{1-1} = 1 + \frac{1}{1-1}$ یا اسی بڑی شے کی برابر ہو

دفعہ ۸ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ $\text{ب} = 10$ اور س تعداد سے بڑا منفی مثال ہو توح (لا) مثبت ہوگا

اگر $\frac{1}{1-1} - \text{لا} = \text{س}$ صفر یا مثبت ہی اور اس پر اعلیٰ درجہ اولی مثبت ہوگا

اگر $\frac{1}{1-1} - \text{لا} = 1 + \text{س}$ یا س ہو یعنی اگر $\frac{1}{1-1} = 1 + \left(\frac{1}{1-1} \right)$ یا کسی بڑی شے کے دفعہ ۸ دیکھو

(۳) لا کی جگہ صفر کو توح (لا) مثبت ہوگا اگر $\text{ب} - \text{لا} = \text{س} + \text{س}$ صفر یا مثبت ہے

یعنی اگر $\frac{1}{1-1} = 1 + \left(\frac{1}{1-1} \right)$ یا کسی بڑی شے کی یہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی

ب نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع سے مقرر کیجئے

(۴) اگر بڑا ب نسبت ب کے نہ ہو تو ح (لا) مثبت ہے اگر

$$\left[\frac{1}{1-1} + \text{ب} \right] - \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} \quad \text{لا} - \text{س} + \text{س}$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر $\frac{1}{1-1} = 1 + \left(\frac{1}{1-1} \right)$ یا کسی بڑی شے کے

اور اسی چھوٹی حد ب نسبت (۳) کے معلوم ہوتی جب ب چھوٹی ع سے نہ مقرر کیجئے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س ہی نہیں ہی تو اس سے ہم کو اعلیٰ حد غائی $\frac{1}{1-1}$ حاصل ہوگی

(۶) فرض کرو کہ ب چھوٹا س ہی نہیں ہی تو (۲) سے $1 + \frac{1}{1-1}$ اعلیٰ حد غائی حاصل ہوگی

(۷) فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ پھول $\frac{1}{2}$ پھول سے ہے تو (۴) سی ہم کو $\frac{1}{2}$ + اعلیٰ غلامی حاصل ہوگی

(۳۰۶) اب ہم سوات کی قمیتوں کی حدود غامبی کی باب میں ایک اور مسئلہ لکھتی ہیں وہ

موقوف اسی جملہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کی قیمت کے حساب لگانے پر موقوف

ہی اور اس حساب کی ترکیب موافق قیمت معینہ لاکھ دفعہ دین بیان ہوئی ہی اگر سر

ایک قیمت معینہ کو تعبیر کرتی ہے تو حساب سے متواتر بہ حاصل ہوگا کہ

ا ب ر د ا ب ر ب و (ا ب ر + پ) س ر و (ا ب ر + پ) س ر + س . . .

فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہی اب ح (لا) کی جامعین کے سطح بناؤ کہ ہر ایک جماعت

میں بہت رقیین اور اوسکی اگی وہ منفی رقیین ہوں جو قابل گمانی والی مثبت رقیوں کی ہوں

بفرض کرو کہ فقط علامتوں ہی کے لکھتی سی یہی نواتر حاصل ہو کہ

+ - - + - - - + + - + - - + +

بہا کی جماعتیں اس طرح بناؤ کہ

$$+, (- - +), (- - - + +), (- +), (- - + +)$$

فرض کرو کہ اول جماعت میں فواء لاکھ لاکھ سے لے کر تک ہیں اور یہی دولتوں سمین داخل ہیں

فرض کرو کہ جہز ضربی لان سے فقیر کرنی ہی ساقط کیا گیا اور امتحان سی لاکھ ایک قیمت پر

مقرر کرو اور جب لا = بر کے ہو تو خارج قسمت کا حساب بعد از تقسیم لا - ع کے کرو

اگر نتیجہ مثبت ہی تو اسکو اسی تعبیر کرو اور اگر لا- کو دوسری جماعت کا سربراہ

و فرض کرد کہ جماعت اوس رقم تک حبسین لائے کہ ملتقی ہی پہنچتی ہے لیکن جب

۱۔ ایک دوسرے جماعت میں سب سے اول مقرر کیا گیا ہو تو ان کی تقسیم کرو اور جب لاء سر ہو تو

میت خارج شمت کا حساب کرو اور اس کو اسی تعبیر کرو اور اہل انہن کو جماعت مابعد

یہ سب سے اول لکھو اور علیٰ ہذا القیاس اگر تمام سنجی آخر تک ثبت ہوں تو بر علیٰ حد غائی مثبت

نیمیتوں کی ہوگی اور عدد بزرگ اسان قواعد میں سی موافق ایک قاعدہ کے منتخب ہو سکتا ہے

اس بات کو یاد رکھنا چاہیے کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اسی جوا علی حد غائی دریافت ہوگی اسی بہت بڑا عدد مطلوب بر نہیں ہوگا

مثلاً مساوات اٹھارہ درجہ کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتوں میں لکھتی ہیں کہ
 $(10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3) + (1000 - 20) + (100 - 80 - 3 + 2 + 4)$

$(20000 - 20000 - 1000) + (2000 - 8000 - 4) +$
 اول عجبت پر خیال کریں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۲ مثبت چھوٹا عدد ہی سلمیٰ ۳ پر امتحان کرنا چاہئے
 اب ہم قیمت

$$10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3$$

کا جب $10000 = 3$ کے ہو حساب کریں

$$10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3$$

پس $342 = 10$

اب ہم قیمت

$$10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3$$

کا جب $10000 = 3$ کے ہو حساب کرتے ہیں

$$10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3$$

پس $3218 = 10$

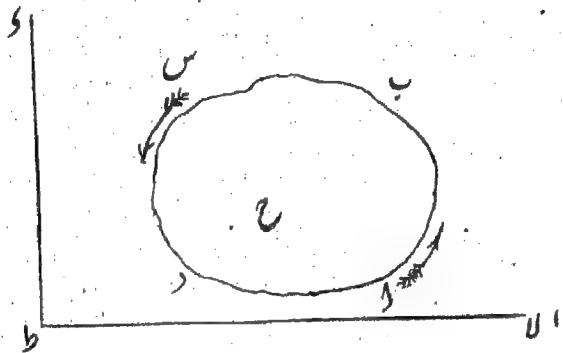
اب قیمت

$$10000 - 10000 - 20 - 1 + 2 + 3$$

کا حساب جب $10000 = 3$ کے ہو کرتے ہیں

اب یہ ظاہر ہے کہ ہم کو تمام نتائج ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ مثبت حاصل ہونگے پس ہی معلوم ہوا کہ
 ۳ مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہے

احاطہ کی گردن سمت میں حرکت کرنا چاہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ ج
کی نویت صفر پہنچتی ہے اور اسکی علامت تبدیل ہوتی ہے فرض کرو کہ ک دفعہ اسکی علامت
+ سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر
 $\frac{1}{4} (ک - ل)$ ہوگی



اس بات پر خیال کرنا چاہی کہ احاطہ ایسا مقرر کیا گیا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی اسکی اوپر نہیں واقع ہوتا
اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ج (ی) = - دو دفعہ یا تین دفعہ یا زیادہ دفعہ ای تو ہم کو خیال کرنا چاہیے
کہ دو یا تین یا زیادہ اصلی نقطے ہیں اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پر ہوں اور مثبت سمت میں حرکت
کرنی ہے مراد ہماری یہ ہے کہ ایک نصف دائرہ ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک پہنچا لگا
ایک چار قانوں کی برابر مثبت زاویہ پر گزرتا ہے اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گزرتا ہے
اس سبب کی ثابت کرنی کی لہی اول صورت بی نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی لیتی ہیں اور یہ
ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہیں

(۳.۹) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ ج جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چھوٹا احاطہ
جس میں ج بھی داخل ہو مقرر کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک مثبت سمت میں اس نہایت
ہی چھوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہے تو ہم کو اب چار صورتوں پر بحث کرنی چاہیے
(۱) فرض کرو کہ نہ ج نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کے اوپر معدوم ہوتی ہیں

یہاں تک انجام دور میں علامت نہیں بدلتی تو قاعدہ سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی اصلی نقطہ
 احاطہ کی درمیان نہیں ہے اور یہ صحیح ہے کیونکہ ع اور ق معلوم نہیں ہوتے
 (۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معلوم ہوتا ہے مگر ع معلوم ہوتا ہے
 اس صورت میں ع مثلاً بدلتا ہے جہاں نقطہ متحرک ہے یہ مقام پر گذرتا ہے جہاں ع معلوم ہوتا ہے
 لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر آجاتا ہے تو اسی معلوم ہوتا ہے کہ جتنی تغیر سی
 کے ہوئی ہوگی اتنی تغیر سی + کے ہوئی ہوگی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہیں اور قاعدہ
 سی ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہیں واقع ہوتا اور یہ صحیح ہے کیونکہ ق معلوم نہیں ہوتا
 (۳) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معلوم ہوتا ہے لیکن ق معلوم ہوتا ہے اس
 صورت میں ع کبھی معلوم نہیں ہوگا اب قاعدہ سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے
 اندر نہیں ہے اور یہ صحیح ہے کیونکہ ع معلوم نہیں ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونوں احاطہ کی اندر اور اوپر معلوم ہوتے ہیں اگر وہ دونوں
 ایک وقت معلوم نہ ہوں تو ہم سطح کو جو احاطہ سی گہری ہوئی ہے اور سطحوں میں تقسیم کردینے
 جہاں بعض میں ع مقرر معلوم ہوتا ہے اور باقی میں صرف ق معلوم ہوتا ہے تو سطح سی دو
 یا زیادہ احاطی بجای ایک احاطہ کی حاصل ہونگی اور انکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳)
 کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جس میں ع اور ق دونوں ایک ہی وقت معلوم نہیں ہوں
 اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کے اندر یا اوپر ہے اور ہم احاطہ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ
 کہ اوپر میں صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی ادسکی اوپر نہ ہو
 فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کے محدودین ہیں اور لا = ط + ص + حم ر
 اور ر = ص + ل جب ر

$$لا + ص + ل = ب + لا + نق (حم ر + لا جب ر)$$

$$= ط + ص + لا + د کے مقرر کرو$$

اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہو سکتی ہیں اور نقطہ متحرک فقط احاطہ لابس

کو مرسم کرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سی ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہیں کہ اگر ایک سادان درجہ کی ہو
نواوسکی ن قسبتین ہونی چاہیے فرض کرو کہ احاطہ لابس دایک اترہ ہوا اور مرکز اوسکا
مبداء ہوا اور اوسکا قطر فیترتہای بڑا ہو تو قیمت بیج کی اوس رقم ج (س) پر
موقوف ہو جس میں اعلیٰ قوت ہد کی ملے ہو اور اگر ہم اوس رقم کو ص (ح + س + ج) جب س
فرض کریں تو بیج = مم (ن بر + س) پس ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ $2 = ن$
اور $0 = بس$ (ک - ل) = ن

(۳۱۲) ہم فی دفعہ ۳۰۸ میں شکل ایسی کہتی ہیں کہ احاطہ کی ہر ایک نقطہ اندر فی سے ایک
نصف قطر دائر ایک سمت میں کھینچا ہی اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ
کی قید اس شکل کی ساتھ فرو نہیں شکل ایسی ہی ہو سکتی کہ نصف قطر دائر ایک سمت میں کھینچا
احاطہ سی طاق دفعہ ملاتی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہی تو نصف قطر دائر جو نقطہ متحرک اور
کسی مبداء قائم کے درمیان کھینچا جائی اور یہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو
وہ ہمیشہ ایک ہی سمت میں متحرک نہیں ہوگا نقطہ متحرک کی قسبت سمت حرکت سی ہم کو سمجھنا چاہئے
کہ گوزاویہ دائر ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوس پر دورہ میں مثبت زاویہ کہ کی برابر اخراش ہوتی
جس سمت کی ہاں شکل لکھی ہی اوسکی قید کہ نہیں ہی غرض شکل کا اثبات پر نہیں ہے کیونکہ
بے نہایت چھوٹی احاطی اگر ہم چاہیں تو ہر ہی ایسی فرض ہو سکتی ہیں کہ وہ بیضوی ہوں جو مبداء متحرک
صرف ایک سمت محدودہ میں نصف قطر دائر کھینچا گ رہتی ہوں اور اگر ہم اس قید کے ہی
بایں نہ رہیں تو ہم کو یہ دیکھنا چاہی کہ دفعہ ۳۰۸ کی آخر میں ہم ہمیشہ زیادہ نہیں ہوتا تو

بر کی اتنی قیمتیں ایسی ہو گئیں کہ جنکی سبب سے کچھ معدوم ہوگا
 جو کچھ ہم کو خیال ہی نہ تھا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہاں تغیرات + سی - اور - سی + بر ہونگے
 (۳۱۳) ہم اپنی ساری تحقیقات میں پہلے فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہیں ہے
 اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات میں کچھ تغیر سوار دفعہ ۳۰۹ کے آخر کے نہیں
 واقع ہوگا اور یہاں نقطہ اتنا ہوگا کہ سر کے وسطی ۲ کہ کی ترتیب ہی اب حرف کی ترتیب ہوگی
 اور تغیرات علامت بجای ۲ م تغیرات علامت کے واقع ہونگے
 (۳۱۴) پہلے کا چھ حصہ کا ضابطہ پستی انسائی کو پڑیا کیے مسائل معادلات کے اندر لکھا ہوا ہے
 اور پروفیسر ڈی موگن کی علم مثلث اور جبر مقابلہ میں اور انہیں حسب کی اور تحریرات میں
 موجود ہی غرض انہیں کتابوں ہی اخذ کر کے پہرے لکھا ہے

پچیسواں باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچھ بیان کرتی ہیں یہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے
 روز بروز اس کی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اسی نکلتی ہیں اس باب میں
 بعض خاص مثالیں افکلی بیان کرینگے اور ان کی توضیح اور تشریح اس طرح کرینگے کہ جسے طالب علم
 مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجھ جائیں اسی کی ایک باب میں مسائل عامہ اس فرع کے
 لکھینگے اور ہر ایک باب میں مسائل معادلات میں جو کام انسی نکلتا ہی اس طرح ان کا استعمال ہوتا ہے
 (۳۱۶) ان معادلات ہم زائد پر خیال کرو کہ

$$۱۰۱ + ۱۰۱ = ۱۰۱ \text{ اور } ۱۰۱ + ۱۰۱ = ۱۰۱$$

ان مساواتوں سے ہم حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱۰۱ - ۱۰۱}{۱۰۱ - ۱۰۱} = \frac{۱۰۱ - ۱۰۱}{۱۰۱ - ۱۰۱}$$

نسب نامہ مشترک ۱۰۱ - ۱۰۱ کو چارہ مقدار ۱۰۱ و ۱۰۱ کا مقطع کہتے ہیں
 اور اس کو اس رمز سے تعبیر کرتے ہیں کہ

لا اور ب کی قیمتوں کی شمار کنندہوں کو یہی مقطعات کہتی ہیں اور لا اور ب کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہیں کیونکہ ہر ایک رقم ان کی دو مقداروں سے مرکب ہے اور مقدار لا اور ب اور لا اور ب کو جو مقطع لا ب م - ا م ب میں واقع ہوتی ہیں اجزاء ذاتی کہتی ہیں اور اصل ضرب لا ب م اور لا ب ا کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہیں رتبہ دوم کی مقطع میں چار اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہیں

اس مقطع کے تعبیر کرنی کی دو سطحیں جو مرزا و پر بیان ہوئی ہیں او سکی شکل مربع کی ہوتی ہیں اور اوس میں دو صفین افقی ہوتی ہیں یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہیں چونکہ یہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix}$$

اسی بہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر افقی صفوں کو عمودی صفوں میں بدل دیں تو کچھ فرق نہیں آتا (۳۱۹) ذیل کے مستطابق اسانی سے ثابت ہوتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{م} \end{vmatrix}$$

پس مقطع میں اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین آپس میں متبادل ہو جائیں تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہے مگر اوسکی قیمت میں کچھ خلل نہیں واقع ہوتا اور اگر ہم دونوں متبادل

ہوں تو مقطع میں کچھ بھی بدل نہیں واقع ہوتا
(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جزائی کو ایک مقدار معلوم میں ضرب دیں
تو مقطع کی ضرب اس مقدار معلوم میں ہو جاتی ہے
(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array}$$

پس اگر دو افقی صفین اور عمودی صفین متطابق ہوں تو مقطع معدوم ہو جائیگا
(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array}$$

پس وہ مقطع جس کا ہر ایک جزائی مجموعہ دو قوتوں کا ہوساوی اور چار مقطعات کی ہونا ہے جو اس سے
بنتی ہیں کہ بجائی ہر کل سطر عمودی کی ہم اونکی جزئیات عمودی سطروں کی لین اور یہ ایک خاص
صورت ہے کہ ہم فرض کریں $\text{ا} = \text{ب}$ اور $\text{ا} = \text{ب}$ تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے
اوپر کے چار مقطعات میں ہی دوسرا مقطع معدوم ہو جائیگا اور ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \end{array}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \\ & = \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \end{aligned}$$

بموجب دفعہ ۳۲ کے اور بموجب دفعہ ۳۲ کے چار مقطعات میں اول دو مقطعات مندرجہ ذیل ہیں
اور بموجب دفعہ ۳۱۸ کے

$$\left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right|$$

پس ہم نے یہ پہچان لیا ہے کہ

$$\left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ - ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ - ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \text{ یعنی } \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right|$$

پس اصل ضرب دوسرے رتبہ کے دو مقطعات کا ایک مقطع دوسرے رتبہ کا ہے
اور یہ ایک خاص صورت ہی کہ اجزاء ذاتی ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ جدا گانہ برابر
۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۱۱ کے ہوں تو یہ مربع مقطع کا

$$\left| \begin{array}{c} ۱۱۱۱۱۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \end{array} \right|$$

برابر اس مقطع کے ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline ۱۰ & \begin{array}{l} ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ \\ ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ \end{array} \\ \hline \end{array}$$

(۳۲۴) اب ہم تیسری رتبہ کی مقطعات کا بیان کرتی ہیں ان ہمزاد مس والون پر غور کرو کہ
 ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵ اور ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ =
 ان مس والون سی پہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\begin{array}{l} ۱ + (۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) + (۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰) \\ ۱ + (۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) + (۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰) \end{array}$$

اور اسی قبیل کے جمعی ، اور سی کے قیمتوں کے واسطی ہونگے
 لاکھ قیمت کی نسبت کو تیسری رتبہ کا مقطع کہتی ہیں اور اس کی نو اجزاء ذاتی
 ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰
 ترکیبی ہیں اور ان میں سے ہر ایک تین اجزاء ذاتی کا حاصل ضرب ہی اور اس مقطع کو اس رقم سے
 تعبیر کرتے ہیں

$$\begin{array}{|c|c|} \hline ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ \\ ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ \\ \hline \end{array}$$

چونکہ قیمت اس مقطع کے پہہ ہے کہ

$$\begin{array}{l} ۱ + (۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) + (۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰) \\ ۱ + (۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) + (۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰) \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ & ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ & ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ & ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ \\ \hline \end{array}$$

لاکھ قیمت کا شمار کنندہ ہی تیسری رتبہ کا مقطع ہی فقط ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰

جدا گانہ نسب نما کی رموزی جملوں میں تبدیل کر لین تو شمار کنندہ کی رموزی جملہ حاصل ہو جائیگی

اب ہم کو یہ ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی تھی وہی ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے

(۳۲۵) فرض کرو کہ ۱ = ۱۱ اور ۲ = ۱۰ اور ۳ = ۰ تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۱ و ۱ \\ ۱ و ۲ و ۱ \\ ۱ و ۳ و ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

پس اس طرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تخیل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور
۱ اور ۲ کے قیمتیں کچھ اس مقطع ہتر نہیں کہتیں اور اگر ہم چاہیں تو ان کو برابر
صفر کے لکھ سکتے ہیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات میں معلوم ہو تو اسی
مثل ۱ و ۲ و ۳ کے دوسری رتبہ کی مقطعات میں ایک ارتباط اس طرح استنباط
کر سکتے ہیں کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کریں
(۳۲۶) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ و ۲ و ۳ \\ ۱ و ۳ و ۱ \\ ۱ و ۱ و ۰ \end{vmatrix}$$

اسی ثابت ہوا کہ اگر افقی صف اور عمودی صف میں تبدیلی ہو جائے گی تو مقطع میں کچھ فرق نہیں آتا (۳۲۷) ذیل کی مطابق سانی سی طرح ثابت ہو سکتی ہیں کہ تیسرے رتبہ کی مقطعات کو دوسرے رتبہ کی مقطعات میں تبدیل کر لیں اور پھر او کی توضیح کریں

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

پس اگر دو عمودی صفوں میں تبادل ہو تو علامت مقطع کی بدل جاتی ہے مگر او کی قیمت نہیں بدلتی اور اس واسطے اگر ہم عمل دو دفعہ کیا جائے تو مقطع میں کچھ تبدیلی نہیں ہوتا اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۲۲ کے اگر دو افقی صفیں باہم تبدیل ہو تو مقطع کی علامت بدل جائے گی مگر او کی قیمت میں کچھ فرق نہیں آئے گا اور اگر ہم عمل دو دفعہ کیا جائے تو مقطع میں کچھ تبدیلی نہیں واقع ہوگا

اسی پہ پہلی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر دو عمودی صفوں میں ہی تبادل ہو اور دو افقی صفوں میں ہی تبادل ہو تو مقطع میں کچھ تبدیلی نہیں ہوگا پس

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

(۳۲۸) دفعہ ۳۲۰ کی طرح ثابت کر سکتی ہیں کہ اگر ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں جڑواتی کو کسی معلوم مقدار میں ضرب دیں تو مقطع کی ضرب او اس مقدار معلوم میں ہو جائے گی (۳۲۹) اسکا ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ اور } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

[illegible]

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم |
| اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم |
| اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم |
| اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم | اسم و اسم و اسم |

بموجب فہمہ ۲۸ کے اور یہ مقطع بموجب فہمہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہے اور جو یہ مقطع باقی رہتی ہیں
انہیں سے ایک یہ ہے کہ

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار | ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار |
| ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار | ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار |
| ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار | ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار |
| ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار | ۱۰۰ دینار و ۱۰۰ دینار |

ایک اور باقی ماندہ چھ مقطعات میں سے لوگو

| | | |
|---|------|---|
| اولم و س ا وب
ارم و س م وب
اوم و س م وب | یعنی | اولم و س ا وب
ارم و س م وب
اوم و س م وب |
|---|------|---|

یعنی - سہ لکھ صدہم

| |
|----------------|
| ۱۰ و ب ۱ و س ۱ |
| ۱۰ و ب ۲ و س ۱ |
| ۱۰ و ب ۳ و س ۱ |

بوجوب دفعہ ۳۴ کے

اسکا نتیجہ یہ ہی کہ جو چہہ مقطوعاً باقی رہتی ہیں اوتسی بہ بنتا ہے کہ

| | |
|----------------|--|
| ۱م و ب ۱ و س ۱ | [۱م (ص ۱م ل ۱م) + ۲م (ص ۲م ل ۲م) + ۳م (ص ۳م ل ۳م)] |
| ۲م و ب ۲ و س ۲ | |
| ۳م و ب ۳ و س ۳ | |

| | | | |
|----------------|---|----------------|------|
| ۱م و ب ۱ و س ۱ | x | ۱م و ص ۱ و ل ۱ | یعنی |
| ۲م و ب ۲ و س ۲ | | ۲م و ص ۲ و ل ۲ | |
| ۳م و ب ۳ و س ۳ | | ۳م و ص ۳ و ل ۳ | |

اسی معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع میں نمایاں ہو سکتا ہے اگر ہم ۱ و ب ۱۰۰۰ جلا گا نہ برابر ۱ و ص ۱۰۰۰ کے فرض کریں تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کریں گے اور یہ ہمیں ساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجزوء کے ہوگا (۳۳۲) ہم فی ہر مثالین مقطعات کی ذات اور صفات کی لکھ دین میں کہ طالب علم کی سمجھ میں بخوبی یہ بات اجائیگی کہ یہ مضمون کیا ہی ہم صرت رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چھوڑتے ہیں اس لیے کہ جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوئیں اسی موافق دفعہ ۳۲۵ کے رتبہ دوم کے مقطعات کی خواص استخراج ہو سکتی تھی مگر جس طرح سی ہم فی اس مضمون کو بیان کیا ہے اسی طرح تبدیوں کے واسطے سودمند ہے باب ایندہ میں ہم اثبات علی العموم لکھینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہوں اس بات پر غور کرو کہ ہم فی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہر اقسام و ادوات کو حل سے لکھی ہے اس تمہید طالب علم ایک ہی دفعہ میں سمجھ سکتا ہے اسی جملی جنکا نام مقطعات رکھا ہے ریاضیات میں واقع ہوتی ہیں جب ہم مسئلہ عامہ لکھینگے تو وہاں مقطعات کے تغیرات بالکل مساوات سی بی لگاؤ لکھینگے اور اسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی میں آسانی ہوتی ہے اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کریں تو طالب علم اس تعریف مقطعات کو جواب باب ایندہ میں بیان ہوگی خوب سمجھے گا (۳۳۳) قیمت مقطع

| |
|----------------|
| ۱م و ب ۱ و س ۱ |
| ۲م و ب ۲ و س ۲ |
| ۳م و ب ۳ و س ۳ |

در ب ۲ س ۳ - ۱ ب ۳ س ۴ + ۱ ب ۳ س ۵ - ۱ ب ۳ س ۶ + ۱ ب ۳ س ۷ - ۱ ب ۳ س ۸
 ہی اول جز ترکیبی ۱ ب ۳ س ۴ ہی اوپر حاصل ضربی ۱ ب ۳ س ۵ ہی اوپر جو اس دفر کے مربع میں
 کہ مقطع کو تیر کرنا ہی قطر میں لگی ہوئی ہیں اور باقی اور اجزا ترکیبی اول جز ترکیبی سے
 موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہیں کہ اعداد زیرین او ۲ ۳

حروف ۱ ب ۳ س ۴ کی پانچ اوتی مختلف طوروں سی لگائی گئی ہیں جتنی طور سی ترتیب میں ان اعداد
 زیرین کی ہو سکتی ہیں اور علامت + یا - کی کسی جز ترکیبی کے اول سطح لگ سکتی ہے
 کہ ہم دیکھیں کہ ہم جز ترکیبی اول جز ترکیبی سی سطح مستطی ہو ہی اگر حقیقت دفعہ تبدلات دو
 اعداد زیرین کا ہو ہی تو + کی علامت لکھو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہیں تو - کی علامت مقرر کرو
 مثلاً دوسرا جز ترکیبی اوپر ۱ ب ۳ س ۴ ہی اور وہ اول جز ترکیبی سی سطح استخراج ہو ا ہے
 اعداد زیرین ۱ ۲ اور ۳ میں تبادل ہو ہی اسلیٰ بموجب قاعدہ کے علامت - کی اول لگائی جائے
 اوپر جز ترکیبی ۱ ب ۳ س ۴ ہی اور وہ دوسرا جز ترکیبی سی سطح حاصل ہوتا ہے کہ

اعداد زیرین ۱ ۲ اور ۳ میں تبادل ہو ہی اور اسوا سطح وہ اول جز ضربی سی دو اعداد زیرین کے
 دو تبادل سی مستطی ہوتا ہی اسوا بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائے اور سطح
 اور باقی اجزا ترکیبی کی مناسب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے
 (۳۳۴) تیسرے مرتبہ کے مقطعات کے یہ خاص صورتیں اشلہ ذیل میں جنکو طالب علم ثابت کر سکتا

| | |
|-----|---|
| (۱) | ۱ ا و ۲ و ۳ گ |
| | ۱ ب ۳ س ۴ - ۱ ب ۳ س ۵ - ۱ ب ۳ س ۶ + ۱ ب ۳ س ۷ گ |
| | ۱ ب ۳ س ۴ گ |

| | |
|-----|---|
| (۲) | ۱ ا و ۲ و ۳ گ |
| | ۱ ب ۳ س ۴ - ۱ ب ۳ س ۵ - ۱ ب ۳ س ۶ + ۱ ب ۳ س ۷ گ |
| | ۱ ب ۳ س ۴ گ |

کو کہتی ہیں اور اس کی اول زمرج \neq کو کلمہ دیتی ہیں اور اسی تعبیر نوٹا ہی مجموعہ اجزاء ترکیبی کا جو اول جز ترکیبی سی مناسب ترتیبوں اور علامات $+$ اور $-$ کی ٹھیک ٹھیک مقرر کرتی حاصل ہوتا ہے مقطوع کی اجزاء ترکیبی مختلف طور سے تعبیر ہوتی ہیں کبھی تو (ے وک) کو بچا لے وک کے کام میں لاتی ہیں اور اس صورت میں ہم یاد رکھنا چاہیے کہ (ے وک) اور (ک وے) جلد جدا مفادیر تعبیر ہوتی ہیں ادنیٰ رتبی کے مقطعات کی مثالوں میں آئیں اسانی ہوتی ہے کہ دوسری اعداد زیرین کام میں نہ لائیں ایک ہی حرف تمام اجزاء ذاتی کے واسطی جو ایک عمودی صف میں ہو کام میں لائیں اور ایک ہی اعداد زیرین سی اوغین تہرید کریں یہی طریقہ کتابت پہلی باب میں اختیار کیا گیا ہے

(۳۴۲) اور اجزاء ترکیبی مقطوع کی اول جز ترکیبی سی اس طرح استخراج ہوتی ہیں کہ دوسری اعداد زیرین ترتیبیں لیتی ہیں اور اول اعداد زیرین میں کچھ بدل نہیں کرتے اور یہ اجزاء ترکیبی ایک اس طرح سی حاصل ہوتی ہیں کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبیں لیں اور دوسرے اعداد زیرین میں بدل نہ کریں اس واسطی کہ فرض کرو کہ

۳۵ و ۳۰ و ۲۰۰۰ مر ایک خاص ترتیبیں ان اعداد اور ۲۰۰۰۳۰

کی تعبیر کریں تو ۱۰۰۰۳۰ و ۲۰۰۰۳۰ و ۲۰۰۰۳۰۰۰۰ اور ایک جز ترکیبی ہی جو اس طرح

پیدا ہوتا ہے کہ اول جز ترکیبی میں دوسری اعداد زیرین ۲۰۰۰۳۰ کو

۳۵ و ۳۰ و ۲۰۰۰ سے بدل دیں لیکن یہی جز ترکیبی اول جز ترکیبی

۱۰۰۰۳۰ و ۲۰۰۰۳۰ و ۲۰۰۰۳۰۰۰۰ سے یہی اس طرح استخراج ہو سکتا ہے کہ

دوسری اعداد زیرین میں کچھ بدل نہ کریں اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر تبدیل کریں یعنی ۱۰۰۰۳۰ سی اور ۲۰۰۰ کو ۳۰ سے اور ۳۰ کو ۳۵ سے ۲۰۰۰ کو ۲۰۰۰ سے

ان دونوں طریقوں سے جو استخراج ہوتا ہے اوغین دونوں اعداد زیرین کے تبادل کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے اور اس واسطی ایک ہی علامت جز ترکیبی کے اول بموجب قواعد

(۳۴۶) جب تمام اجزاء ذاتی سواء ایک کی کسی ایک اضعی صفت من یا جمودی صفت میں محدود ہو جائیں تو مقطع کی تحویل اس حاصل ضرب کی طرف ہو جاتی ہے جو رتبہ مابعد کے مقطع اور اس جز ذاتی کے ضرب دہشتی سے پیدا ہوتا ہے مثلاً اس مقطع پر خیال کرو

۱۰۰ و ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۱۰۳
 ۱۰۴ و ۱۰۵ و ۱۰۶ و ۱۰۷
 ۱۰۸ و ۱۰۹ و ۱۱۰ و ۱۱۱

اکیلی افعی صفوں کی تین متواتر تبادل سی ہم اوس افعی صف کو جس میں سب سے پہلی اور سب سے
 افعی صف میں لاتی ہیں اور اکیلی عمودی صفوں میں دو متواتر تبادل سی ہم اوس عمودی صف کو
 جس میں سب سے پہلی اور سب سے صف میں لاتی ہیں پس بموجب دفعہ ۳۴۲ کے

| | | |
|--|---------------------------|--|
| س م و
س ا و ب م و د ر
س م و ل م و ب م و د ر
س م و ل م و ب م و د ر | $=$

\neq

 | ل م و ب م و س ا و د ر
ل م و ب م و س م و د ر
ل م و ب م و س م و د ر
. : : : : : |
|--|---------------------------|--|

اول جز ترکیبی بائیں طرف س ۱۴ ب ۲۴ دس ہی اور اور اجزاء ترکیبی ایسے
اعداد زیر کے ترتیبوں سے حاصل ہو سکتی ہیں لیکن س ۱۴ صرف ایک جز ذاتی ہے
جس کا عدد ۲۴ میں ہی جو صفر نہیں ہے اور صرف س ۱۴ ہی ہر ایک جز ترکیبی کا جز ضربی ہوگا
جو معلوم نہیں ہوتا اور اور جز ضربی ۱۴ ب ۲۴ دس سے اعداد زیر میں
۲۴ و ۳۰ کے ترتیبوں سے مستقیماً ہوتی ہیں پس اصل مقطع کی تحویل

(1-1) x $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(۳۵۰) اگر ایک نفی صفت یا عمودی صفت میں ہر ایک جزو ذاتی کسی مقدار معلوم میں ضرب کیا جائے

تو وہ مقطع اوس مقدار میں ضرب کہا جاتا ہے،

فرض کرو کہ س = لے والے وا + لے دے وا + لے دے دو + لے دے دن لے دے دن

اورے دین اتنی صفت میں ہر ایک قسم کے میں ضرب دیا ہے تو ہم نے اسے داکو کہہ دیا اور

ع ہے دم کو لے دم کی جگہ اور علی ہذا القیاس کہیں تو مقطع جدید کے واسطیٰ سے گنتیجہ

اول کا حاصل ہوگا

اور سید علی اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں اگر محمودی نصف کی ایک رقم کسی مقدار معلوم میں ضرب کیا جائے

(۳۵۸) اگر ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں ہر ایک جزو ذاتی مجموعہ مرقوم کا ہو

تو مقطع کو مجموعہ نم مقطعات کا خیال کر سکتی ہیں

مثلاً فرض کرو کہ دین حق صفت کا ہر جزو ذاتی مجموعہ م ارقام کا ہو اور فرض کرو کہ

$$\dots + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$$

$$\dots + r + r\bar{Q} + r\mathcal{E} = r\mathcal{L}$$

$$\therefore \text{لکے دس} = \text{عس} + \text{فس} + \text{رس} + \dots$$

توس = لئے دے دے + لئے دے دے + + لئے دے دے

$$= e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

+ ق کے دم + ق کے دم + . . + ق کے دم

+ ۱۰۰ + ۲۵ + ۳۰ + ۴۰ + ۵۰ + ۶۰ + ۷۰ + ۸۰ + ۹۰ + ۱۰۰

پس یہ مجموعہ اوں مقطعات کا خیال کر سکتی ہیں جنہیں خجراگانہ سے وین افقی صفین بہرین

ع. و. ع. م. - ع. ن

ق. اوقم . . عن

سازمان و رسم

(۳۵) اب یہ بتلائینگے کہ فے نو کے مثال کسی متقطع میں خود متقطع کی طرح نمایان ہوئے ہیں متقطع کے

س ۱ و ۱ . . . س ۱ و ۱

س ۱ و ۱ . . . س ۱ و ۱

ان رموز کا فیصلہ قطعی اس ارتباط عام سے ہوگا کہ

سے دے دے = لے دے + لے دے + لے دے + لے دے + لے دے

فرض کرو کہ $س ۱ و ۱ = س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱$. . . س ۱ و ۱ کو س ۱ و ۱ کہتا ہے تو ہم نتائج ذیل ثابت کرتے ہیں
(۱) فرض کرو کہ $س ۱ و ۱ = س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱$. . .

(۲) فرض کرو کہ $س ۱ و ۱ = س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱$. . . س ۱ و ۱ کو س ۱ و ۱ کہتا ہے تو ہم نتائج ذیل ثابت کرتے ہیں
(۳) فرض کرو کہ $س ۱ و ۱ = س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱ + س ۱ و ۱$. . .

اصل قریوں کی مجموعہ کی جہت سے ہر زوج مقطعات کا اس طرح بنا ہی کہ عمودی صفیں ایک معلوم رموز
س ۱ و ۱ میں لیں اور س ۱ و ۱ میں عمودی صفیں دوسرے معلوم رموز میں ہی دوسرے مقطع کی لیں
اول جز ترکیبی س کا س ۱ و ۱ . . . س ۱ و ۱ اور اس کی قیمت یہ ہے کہ

(س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱) (س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱) (س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱) . . .

اس میں اول جز ضربی میں س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ کو تعبیر کرنا ہی جو لحاظ رکھے لیا جائے اور دوسرے جز ضربی میں س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ کو تعبیر کرنا ہی جو لحاظ رکھے لیا جائے اور علیٰ ہذا القیاس اور یہ مجموعی ایسی ع ۱ و ۱ تک پہنچتی ہیں اور یہ دونوں اس میں داخل ہیں
پس اصل ضرب اس جملہ کے قیمتوں کے مجموعہ لینی سے دریافت ہو سکتا ہے کہ

س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ . . . س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ . . .

جب کہ س ۱ و ۱ . . . کی تمام صحیح قیمتیں اسی ع ۱ و ۱ تک پہنچائیں

اب ہم اس مجموعہ کو

س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ . . . س ۱ و ۱ اور س ۱ و ۱ . . .

اور س کے اور اجزاء ترکیبی ہی اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں کہ دوسرے اعداد زیرین کی ترتیبیں ہیں اور مناسب علامت مقرر کریں اب تمام قیمت سے وکی سی یہ استخراج ہوتا ہے کہ رفرنس کے دوسری اعداد زیرین کو بدلتی ہی کوئی تغیر رخ کے اعداد زیرین میں نہیں آتا لیکن رفرنس کے اول اعداد زیرین بدل جاتی ہیں اور صرف یہی بدلتی ہیں اسی ہم ایک نتیجہ نکالتی ہیں جو اس طرح تعبیر ہو سکتا ہے

س = ج روص و ط ... (ا اور ۲ روص ۳ و ط ... ج + ب اور ۲ روص ب و ط ...)
یہاں ج + ب اور ۲ روص ب و ط ... سی ق رتبی کا مقطع دوسری معلوم سلک رموز
خاص افقی صفوں کی یعنی سی بنتا ہے اور ج کا مرجع اول اعداد زیرین کی تغیرات میں دفعہ ۳۲۴ کو دیکھو
اس مقطع کو ن سی تعبیر کرتی ہیں اب اول فرض کرو کہ مع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہی تو اعداد
زیرین روص و ط ... تعداد میں ن ہیں اور کوئی اوٹھیں سی ن سے بڑا نہیں ہے
اسی اسبست ہوتا ہے کہ اوٹھیں ہمیشہ دو یا زیادہ دوسری ایک ہی قیمت رکھتے ہیں پس ن ہمیشہ
بموجب دفعہ ۳۲۵ کے معدوم ہوتا ہے اور سی واسطی س معدوم ہوتا ہے
دوم فرض کرو کہ ج = ن تو نظم اعداد زیرین کا رص ط ... ایک ترتیب ن رموز
اور ۲۰۰ ن کی ہوگی اور وہ کچھ نہ ہوگی جب تک ق کو معدوم نہ کریں اب متواتر
مختلف ترتیبوں کی یعنی سی علامت ق کی تبدیل ہوگی مگر اسکی قیمت بموجب دفعہ ۳۲۴ کے
نہیں بدلیگی پس قیمت س کی تحویل اس حاصل ضرب کی طرف ہوگی جو اس مقطع کو دوسرے
معلوم سلک رموز سی بنانا چاہیے مجموعہ تمام اجزاء ترکیبی میں جو ج + ب اور ۲ روص ب و ط ...
تعبیر ہوتی ہیں ضرب دینی سی پیدا ہوا سمین ج کا مرجع دوسرے اعداد زیرین سے تغیرات میں
اسی واسطی جب ج = ن

$$س = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

اباخر فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی نو نظم اعداد زیرین رص ط . . . اجتماع
 ن اعداد کی ع اعداد او ۰۰۲ ع میں سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعوں کی
 $\frac{ع}{ع-ن}$ ہوگی فرض کرو کہ ن کے معنی موافق سابق کے ہوں باکو اسی بلندی میں
 جو ن ہو جائی او سکوع سی تعبیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کو س کے
 ایک رقم کی واسطی ر ق حاصل ہوگا اور یہ اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ $\frac{ع}{ع-۱}$
 میں سی ممکن محدود اجتماع منتخب کر لیں اسی واسطی جب ع بڑا بہ نسبت ن کے ہے تو ہم کو
 یہ حاصل ہوتا ہے کہ س = جمع ن آسمین ج مجموعہ $\frac{ع}{ع-ن}$ ارقام کا ہے جو
 ممکن اجتماعوں سی پیدا ہوتا ہے

(۳۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت میں ہم دیکھتی ہیں کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا
 ن ہی رتبہ کی مقطع میں نمایاں ہو سکتا ہے اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا
 ن ہی رتبہ کی مقطع میں نمایاں ہو سکتا ہے اس واسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو
 ن رتبی کے مقطع صورت میں نمایاں کر سکتی ہیں اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات میں سے
 تیسرے مقطع کو ن رتبی کی مقطع کی صورت میں ظاہر کر سکتی ہیں پس ہم دیکھتی ہیں کہ حاصل
 ضرب تعداد مقطعات کا جو ایک ہی رتبی کے ہوں اسی رتبی میں نمایاں ہو سکتا ہے
 اسی معلوم ہوا کہ اکثر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہوں اور کتنی ہوں اسی
 رتبے کے مقطع کے صورت میں اور اجزاء ضربی کی اعلیٰ رتبہ کے مقطع کے صورت میں
 بھی نمایاں ہو سکتا ہے اس واسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلیٰ رتبے کے
 مقطع کی بن سکتی ہیں اور جب یہ بن جائیں تو ان مقطعات کا حاصل ضرب او سے رتبے
 کے مقطع کی صورت میں بن سکتی ہیں

(۳۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

ا ا و ا ا ا و ا
ا ن و ا ا ن و ا

ا و ا ا و ا
ا ن و ا ا ن و ا

بموجب دفعه ۳۴ کی سہم تواتر افقی صفوں کو غور و صفوں میں خواہ ایک میں یا دو نو مقطعات میں یک سکتہ ہرگز پس اگر اس حال غریب کو اس طرح تعبیر کریں

ا ا و ا ا ا و ا
ا ن و ا ا ن و ا

اب ہم نئی اجزاء ذاتی چار طریقوں سے بناتی ہیں اسلئے کہ ہم نو انین خیل میں ہی حروف کو چاہتے ہیں کہ
اسلئے وک = اے و ا بس د + اے و ا بس د + + اے و ا بس د
یا اسلئے وک = اے و ا بس د + اے و ا بس د + + اے و ا بس د
اسلئے وک = اے و ا بس د + اے و ا بس د + + اے و ا بس د
اسلئے وک = اے و ا بس د + اے و ا بس د + + اے و ا بس د
(۳۵) فرض کرو کہ اے وک مثال اے وک کو قطع میں تعبیر کریں تو نظم رموز

ا ا و ا ا ا و ا
ا ن و ا ا ن و ا
ا ن و ا ا ن و ا

کو نظم متکافیه رموز

ا ا و ا ا ا و ا
ا ن و ا ا ن و ا
ا ن و ا ا ن و ا

م افقی تصفین اور عمودی تصفین معدوم ہوں اور باقی رموز کو سر کا کر ایک رمز کے جدید
 مربع میں لکھیں ہوں۔ م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئہ یا مقطع اصغر بلحاظ
 اصلی مقطع کی کہتی ہیں اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفوں میں ہوتی ہیں ان سے
 ایک مربع رمز کا بنی گا جو ایک مقطع م رتبی کا ہو گا یہی مقطع جزئہ یا مقطع اصغر ہے
 ان دو مقطعات جزئہ یا اصغر کو ایک دوسرے کی مستم کہتے ہیں
 (۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئہ نظم تکافیہ کا تعداد
 برابر ہوتا ہی حاصل ضرب م۔ ۱ اور اصل نظم کے مقطع جزئہ مستم کے
 فرض کرو کہ م۔ ۱۰۰۰ رص ایک ترتیب اعداد اور ۰۰۰ کو تعبیر کر اوسے وک۔ ۱۰۰۰ لوو
 دوسرے ترتیب کو تعبیر کریں اور م۔ ۱۰۰۰ اور وک۔ ۱۰۰۰ اور م۔ ۱۰۰۰ ہر ایک کو م عددوں کی جماعت فرض کرو
 اور رص۔ ۱۰۰۰ اور لوو۔ ۱۰۰۰۔ کون۔ م عددوں کی جماعتیں فرض کرو ہیں

لکھوے و لکھوے وک
 لکھوے و لکھوے وک

مقطع جزئہ نظم تکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو ص سے تعبیر کرو

| | | | |
|----|------------------|------------------|------------------|
| اب | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک |
| | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک |
| | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک |
| | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک | لکھوے و لکھوے وک |

مراہین ۱۰۰۰ ہی اگر ترتیب م۔ ۱۰۰۰ رص اور وک۔ ۱۰۰۰ لوو موی
 ایک ہی نوع کی ہوں اور۔ ای اگر ان کی ترتیبیں مختلف نوع کی ہوں
 اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں بموجب دفعہ ۳۶۸ کی اجزاء والی
 از دیانسی مقطع ص کا ن رتبہ پھر صو دکر سکتا ہی پس م بجای ص کے

وہ صفر میں گرب رولو واحد سی اور اس طرح (م + ۱) افقی صف میں دوسرے رقم یہ ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

$$س + م + ۲ = کج رولو$$

اس طرح عمل کرنے سے ہم کو یہ دریافت ہوگا کہ (م + ۱) دین افقی صف حاصل ضرب

ص اور مر میں وہی ہی جو مر میں (م + ۱) دین صف ہے

علیٰ ہذا القیاس (م + ۲) دین افقی صف حاصل ضرب میں وہی ہو (م + ۲) دین عمودی مر میں

پس مقطع جو س وی لہ ص مر کا ہو موجب فہ ۳۲۴ کے تحویل اوس حاصل ضرب کی

طرف ہو سکتا ہی جو س اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

لر دلو لر دمود . . .

لص دلو لص دمود . . .

$$ص = مر - ۱ \quad \left| \begin{array}{l} لر دمود لر دلو . . . \\ لص دلو لص دمود . . . \end{array} \right.$$

(۳۴۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کری امثلہ (۴) و (۵) و (۶) میں ہم فی دہہ مقطعات لکھیں

جنکے اجزاء ذاتی خود مقطعات ہیں

$$(۱) \quad \left| \begin{array}{l} ۰ و س و ص و لر \\ س و ۰ و لر و ص \\ ص و لر و ۰ و س \\ لر و ص و س و ۰ \end{array} \right. = س س س + لر لر لر + س س س - س س س - لر لر لر - ص ص ص - ص ص ص - لر لر لر$$

$$(۲) \quad \left| \begin{array}{l} ۰ و س و ص و لر \\ س و ۰ و لر و ص \\ ص و ۰ و لر و ۰ و س \\ لر و ص و س و ۰ \end{array} \right. = (س س س - ص ص ص + لر لر لر) - (س س س - ص ص ص + لر لر لر) - (س س س - ص ص ص + لر لر لر) - (س س س - ص ص ص + لر لر لر)$$

| | | |
|-----|--|--|
| (۳) | س ر و ه و ل ر | |
| | ه و ر و ل ر و ه م | |
| | ه و ل ر و ه ر و س | |
| | ل ر و ه م و ه س و ه ر | |
| | = ه ر + ه ر (ه + ه + ل ر + س + ه + ل ر + س + ه + ل ر) +
(ه س - ه م + ل ر ل ر) | |

| | | | | |
|-----|-------|-------|---|-----------|
| (۴) | س و ج | ح و ل | = | ل و ه و ج |
| | ح و ل | ن و ه | | ه و ب و ن |
| | ح و ل | ل و ه | | ح و ن و س |
| | ن و ه | ح و ب | | |

| | | | | |
|-----|-------|-------|---|-----------|
| (۵) | ح و ل | ن و س | = | ل و ه و ج |
| | ن و ه | ه و ج | | ه و ب و ن |
| | ل و ه | ه و ب | | ح و ن و س |
| | ه و ب | ح و ن | | |

| | | | | |
|-----|-------|-------|-----------|---------|
| (۶) | پ و ن | ن و س | ه و ب | |
| | ن و س | ه و ج | ح و ن | |
| | ن و س | س و ج | ح و ل | |
| | ه و ج | ح و ل | ن و ه | = مجزوز |
| | ه و ب | ح و ل | ل و ه | |
| | ح و ن | ن و ه | ه و ب | |
| | | | ح و ن و س | |

| | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| (۷) | ل و ب | س و د | ب و س | ل و د | س و ل | ب و د | = |
| | ل و ب | س و د | ب و س | ل و د | س و ل | ب و د | |

ستایشان باب

استمال مقطعات

(۳۶۴) فرض کرو کہ لوگوں میں معدوم ہوتے ہیں اور یہی فنا ہوتا ہے تو دفعہ ۲۶۲ کے ترکیب سے مفادیر مجھول غیر المعین صورت بذ کی ہو جائیگی اس صورت میں ہم ن۔ مساواتیں معلوم ساوا تون میں سی لیں تو نسبت ان۔ مفادیر مجھول کی باقی مفادیر مجھول کی ساتھ دریافت کرنی کی واسطی یہ مساواتیں کافی ہوں گی

پہلی نسبت پہلی ایک دفعہ معین ہو سکتی ہیں اس واسطی کہ ہم کو یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
لا : لا م : لا م :: ... = اے د : اے م : اے و : اے و ...

اسمیں سے ایک صحیح عدد ہے اور ن سے بڑا نہیں ہے
 دلیل اس سب سے کہ = ۰ نو موجب دفعہ ۳۷۴ کے اور ک کی تمام صحیح قیمتوں
 ۱ اور ن کے درمیان ہوں گے
 لکھ دے ۱ + لکھ دے ۲ + لکھ دے ۳ + ... =

اور جب لا، ولا، ولام۔۔۔ اور کی نسبت معنی کے موافق لی گئی ہیں تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے
کے دا لا + لکس و لام + لکس و لام = ۔۔۔۔

معلوم ہوا توں میں سی۔ ن۔ مساواتین لین اور لوم ولوم۔ ۰۰ لوم ہر یک کو برابر
صفر کے فرض کریں تو ہم کو اکثر اکیلی محدود قیمت ہر یک (ن۔ ۱) مفادیر مجہول اور باقی مقدار مجہول
میں نسبت معلوم ہو جائیگی

اسی بہہ استخرج ہوتا ہے کہ جب $\frac{1}{s} = 0$ تو
 کے ۱ : کے ۲ : کے ۳ :
 اکل بے لگاؤ سے ہیں

(۳۶۵) اگر لو، ولو، ... توں تمام معدوم ہو جائیں اور س فنانہ ہو تو نظم مساوات کا دفعہ ۳۶۲ میں کوئی صل نہیں کہتا الا اس حالت میں کہ لا، لام، ولام ... لان تمام صفر ہوں شرط ہے۔ ضروری تاکہ مقادیر مجبور کی قیمتیں جو صفر نہ ہوں دریافت ہو جائیں

باب سیم و ششم

استعمال مقطعات

۲۹۱

باب سیم و ہشتم
۲۶۱
فرض کرو کہ مقطع حج ۱۰۰۰ لدا ۲۰۰۰ لسن دن کو عمر تعبیر کرتا ہے
سے دکن امثال لے دکن کو جو عمر میں ہو تعبیر کرتا ہی اوپر کے مساواتوں سے
قیمتیں لو اور لوہہ ۱۰۰۰ لون کی دریافت کر سکتی ہیں اور دفعہ ۳۶۲ کی طرح عمل کر کے
ہم کو یہ نتیجہ عامہ حاصل ہوگا

عرلوکس = س { لا، لکروا + لام مسکن و ۰۰ + لان مسکن وں }
 دفعہ ۴۲ کے مساوات معلوم سی اس نتیجہ کے مقابلہ کرنے سے بہم حاصل ہوتا ہے کہ

لوس والا + لوس ولام + ... + لوس ون لان = لوس
چونکہ قیمتیں لوس کی مستطایقہ میں

$$\frac{\text{کس سہ کی دے}}{\text{ع}} = \text{اس کی دے}$$

لیکن ع = ۱-۲ بموجب دفعہ ۳۵۸ کے پس

مسکے = مے - ۲ = ۱ کرے

(۳۴۸) اب ہم ایک اور سوال میں مقطعات کا استعمال کرتی ہیں یعنی افولمی سہتاسی تقادیر معلوم کے فرقوں کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں

فرض کرو کہ ن مقدار ۳۴ و ۳۵ سن سے تعبیر کی جائیں اور عا و س حاصل ضرب کو تعبیر کر
جو ا و ن ضرب دینی سے پیدا ہو جو ان مقدار میں سے ہر یک کو اس کی قبل کی مقدار کے
تفریق کرنے سے پیدا ہوں یعنی

$$E = (E_1 - E_2) + (E_2 - E_3) + \dots + (E_{n-1} - E_n) + E_n$$

تو مع مقطوع ریشہ کا پیدا ہو سکتا ہی اس واسطی کہ اس مقطوع پر خیال کرو

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ |
| ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ |
| ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ |
| ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ | ۱-۱ |

یہ منقطع ایک جملہ ناطقہ صحیح مقدار میں ۲۰۰۰ سن کا ہی اور وہ بموجب دفعہ

۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہی اگر کوئی دو اون میں سی برابر ہوں اس واسطے وہ اصل ضرب پر

جس کو ع سی بغیر کیا ہی تقسیم ہو سکتا ہی اور یہ اور نیز منقطع اور حاصل ضرب

ع دونوں (۱-۲) درجہ کے قوا اور حاصل ضرب ۳۰۰۰ سن

میں ۲۰۰۰ سن اس واسطے اب منقطع کو ع پر تقسیم کریں تو کوئی عدد خارج قسمت ہوگا

اور یہ عدد چاہی کہ واحد ہو کیونکہ یہ اول جز ترکیبی منقطع کو ان اجزاء ضربی شائی کے

حاصل ضرب کے اول ارقام سی مقابلہ کر کے ہم دیکھتی ہیں اور ع ان اجزاء ضربی مرکب پر

(۳۴۵) ان رتبہ کے منقطع میں ۱۰۰۰ سن میں حاصل ضرب ع میں پہلی مختصر ہونے سے

اور محو ہوتی سی بہت سی رقمیں ہونگیں یعنی (۱-۲) پس کثرت ارقام کی بچنی کی لپی

منقطع بڑی فائدہ مند صورت حاصل ضرب کے واسطے ہے

(۳۴۵) ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{array}{|l|l|} \hline ۱۰۰۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰ \text{ سن} & ۱۰ \text{ سن} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|l|l|} \hline ۱۰۰۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰۰ \text{ سن} & ۱۰۰ \text{ سن} \\ \hline ۱۰ \text{ سن} & ۱۰ \text{ سن} \\ \hline \end{array}$$

اب حاصل ضرب ان منقطعات کا ایک ہی منقطع کی صورت میں نمایاں ہو سکتا ہے دفعہ

۳۴۵ میں جو چار ترکیبیں لکھی ہیں اون میں سی آخر ترکیب کے اختیار کرنے سے

$$ع = ۱۰۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰ \text{ سن} + ۱۰ \text{ سن}$$

$$۱۰۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰ \text{ سن} + ۱۰ \text{ سن}$$

$$۱۰۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰ \text{ سن} + ۱۰ \text{ سن}$$

$$۱۰۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰۰ \text{ سن} + ۱۰۰ \text{ سن} + ۱۰ \text{ سن}$$

(۳۴۵) مثلاً فرض کرو کہ ۳۰۰۰ سن و ۳۰۰ سن و ۳۰ سن و ۳ سن کی ایک مساوات کی میں تو ع

مقطعات فرقوں کے حوصلہ غریب سی بدل جائیں اور اجزا و ضربی شمار کنندہ اور شباہ میں

بخوبی اجائیں تو لائے کی قیمت اوپر کی صورت معینہ میں ہم کو معلوم ہوگی

(۳۷۳) مساوات معلوم ہی خاص مقدار کے ساقط کرنی سی ایک مساوات حاصل

کرنی کی اندر بہی ترکیب مقطعات کی کام آتی ہی فرض کرو کہ معادلات - ح (لا) = ۰ اور مخ (لا) = -
میں ہم کو لا ساقط کرتا ہے آئیں

$$\text{ح (لا) = لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا}$$

$$\text{حج (لا) = ب + ب + لا + ب + لا}$$

اب ہم عمل اس طرح کرتے ہیں کہ

$$\text{ح (لا) = لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا}$$

$$\text{لا ح (لا) = ۰ + لا + لا + لا + لا + لا + لا}$$

$$\text{حج (لا) = ب + ب + لا + ب + لا + ب + لا}$$

$$\text{لا ح (لا) = ۰ + ب + لا + ب + لا + ب + لا}$$

$$\text{لا ح (لا) = ۰ + ۰ + ب + لا + ب + لا + ب + لا}$$

$$\text{فرض کرو کہ س = لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا}$$

$$\text{۰ + لا + لا + لا + لا + لا + لا}$$

$$\text{ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب}$$

$$\text{۰ + ب + ب + ب + ب + ب + ب}$$

$$\text{۰ + ۰ + ب + ب + ب + ب + ب}$$

(۱) مساوات $۱۰ = ۳۰ - ۲۰$ کی ایک قیمت دریافت کرو

(۲) مساوات $۱۰ = ۳۰ - ۲۰$ کی ایک قیمت دریافت کرو

باب ۳

(۱) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ۱۰ اور ۱۰ اور ۲۰ ہوں

(۲) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ۱۰ اور ۲۰ ہوں

(۳) اٹھویں درجہ مساوات ایسی بناؤ جسکی قیمت $۳۰ + ۳۰ + ۳۰$ ہو

(۴) ان مساواتوں کو حل کرو مساوات کی ایک قیمت معلوم ہے

$$(۱) ۱۰ - ۲۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ اور قیمت معلوم } ۳۰ - ۲۰$$

$$(۲) ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ اور قیمت معلوم } ۳۰ - ۲۰$$

$$(۳) ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ اور قیمت معلوم } ۳۰ + ۳۰$$

$$(۴) ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ قیمت معلوم } ۳۰$$

$$(۵) ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ قیمت معلوم } ۳۰ + ۳۰$$

$$(۶) ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ قیمت } ۳۰ + ۳۰$$

$$(۷) \text{ مساوات } ۱۰ - ۲۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ کو حل کرو ایک قیمت اسکی } ۳۰$$

اور دوسری قیمت ۱۰ - ۲۰ ہے

$$(۸) \text{ مساوات } ۱۰ - ۲۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ کی ایک قیمت } ۳۰ \text{ اور قیمتیں اور } ۳۰ \text{ دریافت کرو}$$

$$(۹) \text{ مساوات } ۱۰ - ۲۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ کی متکافی قیمتوں کا مجموعہ}$$

اور قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ اور متکافی قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ دریافت کرو

$$(۱۰) \text{ مساوات } ۱۰ - ۲۰ = ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ \text{ کی قیمتیں}$$

۳۰ اور ۳۰ اور ۳۰ + ۳۰ (۳۰ - ۳۰) کی صورت کی سن مساوات کو حل کرو

(۱۱) مساوات معلوم کی قیمتوں کے کعبوں کا مجموعہ دریافت کرو

(۱۰) دہ مساوات دریافت کرو جسکی قیمتیں سہ حصہ و سرفر
 $\frac{1}{4} (1 + 2 + 3 + \dots + 24) \text{ اور } \frac{1}{4} (1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 24)$ ہیں دوسری نمبر کو کہ

$$= \dots + \frac{سہ}{۲} + \frac{سہ}{۲} + \dots$$

(۱۱) اگر ط و ص دس قیمتیں ایک مساوات کی ہوں تو قیمت

$$\dots + \frac{ط}{۲} + \frac{ص}{۲} + \dots$$

کی دریافت کرو

(۱۲) کچھ مثبت مفاد میں اور او نکا اوسط حسابیہ پڑا اوسط ہندسہ سے ہی تو ثابت کرو کہ

$ع - ۲ - ع$ پہچوٹاں سے ہی اور مساوات کی ناممکن قیمتیں ہیں

(۱۳) اگر ط و ص دس قیمتیں مساوات کی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 24) + (1 + 2 - 3 + 4 - \dots + 24) = 0$$

باب

(۱) ذیل کی مساواتوں کو ایسی مساواتوں میں تبدیل کرنا کہ جسکی قیمتیں اصل مساوات

کی قیمتوں پر ایک عدد معین کی زیادہ کرنے سے پیدا ہوں

$$(۱) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰ \quad (۲) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$(۳) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

(۲) ذیل کی مساواتوں کو ایسی مساواتوں میں تبدیل کر دو کہ اوکی دوسری رقم نہ ہو

$$(۱) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰ \quad (۲) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$(۳) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰ \quad (۴) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

(۳) ذیل کی مساواتوں کو ایسی دو اور مساواتوں میں تبدیل کر دو کہ او میں تیسری رقم نہ ہو

$$(۱) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵ \quad (۲) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰$$

$$(۳) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰ \quad (۴) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

(۴) مساوات $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ کی صورت بدل کر ایسی مساوات بناؤ

کہ ہتھالی اور سکی اعداد صحیح ہوں اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسرے رقم کو دور کر دیا اور مساوات کو حل کرو

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

(۶) ذیل کی مساواتوں میں سی ہر ایک مساوات کی بہت اس طرح تبدیل کرو کہ اسکی

قیمتیں مجزور مساوات کی قیمتوں کی تفاوت کا ہوں اور قیمتوں کی خواص پر بحث لکھو

$$(۱) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4}$$

(۷) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3$ کی بہت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں کافی

مساوات معلوم کی قیمتوں کی ہوں اور بہت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہوا اسکی قیمتوں کو بقدر واحد لکھو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ کی حقیقی قیمتیں مختلف علامت ہیں اور

دو ہی زیادہ اسکی حقیقی قیمتیں نہیں ہیں اور وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہیں

(۹) مساوات $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ کی قیمتیں ط و ص و س سے تعبیر ہوتی ہیں

اس مساوات کی بہت بدل کر اور مساواتیں بناؤ جسکی قیمتیں بمعینہ بہ تفصیل ذیل ہو

$$(۱) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۳) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۴) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۵) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۶) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۷) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۸) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۹) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۱۰) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۱۱) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۱۲) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۱۳) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (۱۴) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(۱۵) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

(۱۰) مساوات $لا + ق + لا + ر =$ قیمتیں ط و ص و س میں اسکی بہت بدل کر اور مساواتیں بناؤ

جسکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱) $\left(\frac{ط}{ص-س}\right)^2$ و $\left(\frac{س}{ط-ص}\right)^2$

(۲) $ص ط + ط س + و س + ص + ط و ط س + س + ص$

جسکی قیمتیں

(۱۱) اگر مساوات $لا - ۳ - ۴ - لا + ۱۱ - ۴ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ

$\frac{ص + س}{ط + ط} = \frac{ط + ط}{ص + ص}$ ہوں

(۱۲) اگر $لا - ۳ - ۲ - لا + ۲ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی

قیمتیں $\frac{ص + س}{ط + ط}$ و $\frac{س + ط}{ص + ص}$ و $\frac{ط + ص}{س + س}$ ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

$لا + ع + لا + ق + لا + ر = ۰$

کی ساقط نہیں ہو سکتی اگر ع ۲ چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

$لا + ع + لا + ع + لا + ع + لا + ع = ۰$

کی ایک ہی تبدیل بہت سی ساقط ہو سکتی ہیں اگر $ع = ۴$ (۴ - ع) $ع = ۱$

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) $لا + ۴ + لا + ۴ + لا + ۴ + لا + ۴ = ۱۰$ (۲) $لا + ۴ + لا + ۳ + لا + ۲ - لا - ۴ = ۰$

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $لا + ۴ + لا + ۴ + لا + ۳ = ۰$ میں دوسری اور تیسری رقم

ایک ہی تبدیل بہت سی نہیں ساقط ہو سکتی لیکن اگر لایں ضرب دیں تو ہو سکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ان درجہ کی مساوات میں سی دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

$n \times (\text{قیمتوں کے مجذورون کے مجموعہ}) = \text{قیمتوں کے مجموعہ کے مربع}$

باب ۵

- (۱) ثابت کرو کہ مساوات $u^5 - 5u^4 + 3u^3 = 0$ کی کم سے کم دو خیالی قیمتیں ہیں
 (۲) ثابت کرو کہ مساوات $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ کی کم سے کم چار خیالی قیمتیں ہیں
 (۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتائج حاصل ہو سکتی ہیں
 (۱) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۲) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۳) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$

باب ۴

- (۱) ان مساواتوں کو حل کرو ہر ایک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں
 (۱) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۲) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۳) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۴) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۵) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۶) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۷) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۸) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۹) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۱۰) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۱) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۲) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۱۳) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۴) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۵) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۱۶) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۷) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۱۸) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$
 (۱۹) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۲۰) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$ (۲۱) $u^5 - 5u^4 + 3u^3 - 1 = 0$

$$(۲۰) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$$

(۲) وہ شرط دریافت کرو جس کی لاء $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی مساوی قیمتیں ہوں

(۳) اگر لاء $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی تین برابر قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$$

(۴) اگر لاء $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی دو مساوی قیمتیں برابر ط کے ہو

تو ثابت کرو کہ لاء $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی ایک قیمت ط ہے

(۵) اگر لاء $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی دو مساوی قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ ایک

$$\text{اونین سی قیمت مساوات درجہ دوم}$$

$$۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$$

باب ۷

(۱) $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کی منفی اور مثبت قیمتوں کی حدود کا تعین کرنا

(۲) $۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$ کو سطح لکھو کہ جس کی ثابت ہو کہ ۱۴ علی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہے

(۳) ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں جفتی قیمتیں حدود غائی بنو معین کی گئی ہیں اور میان واقع ہیں

$$(۱) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲ \quad \text{حدود معینہ } \frac{1}{4} \text{ اور } ۱$$

$$(۲) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲ \quad \text{حدود معینہ } ۱۴ \text{ اور } ۱۵$$

$$(۳) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲ \quad \text{حدود معینہ } ۱۴ \text{ اور } ۱۵$$

$$(۴) \quad (۲۴ - ۳۲) (۱ + ۵ + ۹ + ۱۳) = ۲۰ \quad \text{حدود معینہ } ۵ \text{ اور } ۳$$

$$(۵) \quad (۲ - ۱۴ - ۲۲) = ۲۳ \quad \text{حدود معینہ } ۲ \text{ اور } ۴$$

$$(۶) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲ \quad \text{حدود معینہ } ۵ \text{ اور } ۱۴$$

(۴) معادلات ذیل میں نیوٹن کی ترکیب سی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

$$(۱) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲ \quad (۲) \quad ۱ - ۳ + ۵ - ۷ + ۹ - ۱۱ + ۱۳ - ۱۵ = ۲$$

$$(۱) \quad ۳ - ۳۱ - ۱۱۴ - ۱۲ = ۰ \quad \text{و} \quad ۷ - ۷۱ - ۷۵ + ۱۳ = ۰$$

$$(۲) \quad ۳ - ۳۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۰ \quad \text{و} \quad ۵ - ۵۱ + ۱۱ - ۷ = ۰$$

$$(۴) \quad \text{مساوات } ۷ - ۷۱ + ۳۴ = ۰ \quad \text{اور } ۳ - ۳۱ - ۷۱ + ۲۲ = ۰ \quad \text{کو حل کرو}$$

پہلی مساوات کی ایک قیمت سے چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنہیں دو قیمتیں مشترک ہیں

$$۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۲۴ = ۰ \quad \text{و} \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۱۲ = ۰$$

(۸) م اور د کی رقموں میں اس مساوات

$$۷ + ۷۱ - ۷۲ + (م + م) = ۰ \quad \text{و} \quad ۷ + ۷۱ - ۷۲ + ۱۲ = ۰$$

کی قیمتیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور د کی رقموں میں تحقیق کرو

باب ۱۰

(۱) ان معادلات متکا فیہ کو حل کرو

$$(۱) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۳۳ = ۰ \quad \text{و} \quad ۱ + ۷۲ - ۷۳ + ۷۱ = ۰$$

$$(۳) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۵۵ = ۰ \quad \text{و} \quad ۲ + ۷۵ - ۷۴ + ۷۱ = ۰$$

$$(۵) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۱۹ = ۰ \quad \text{و} \quad ۱ + ۷۲ - ۷۱ - ۷۳ = ۰$$

$$(۷) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۱۱ = ۰ \quad \text{و} \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۳۳ = ۰$$

$$(۸) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۵۵ = ۰ \quad \text{و} \quad ۲ - ۷۵ + ۷۴ = ۰$$

$$(۹) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۱۴ = ۰ \quad \text{و} \quad ۸ + ۷۱ - ۷۲ = ۰$$

(۲) معادلات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو اور ان کا تنزل کرو

$$(۱) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۳۳ = ۰ \quad \text{و} \quad ۱ + ۷۲ - ۷۳ = ۰$$

$$(۲) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۵۵ = ۰ \quad \text{و} \quad ۲ + ۷۵ - ۷۴ = ۰$$

$$(۳) \quad ۷ - ۷۱ - ۷۲ + ۱۹ = ۰ \quad \text{و} \quad ۱ + ۷۲ - ۷۱ - ۷۳ = ۰$$

(۲) مساوات $لا + ق + لا + ر =$ کی یہ صورت $لا = (لا + لا + ب)$ بن جائی اسکی

واسطی اور رتین کیا ارتباط ہونا ضرور ہے

اور یہ اس ارتباط مساوات $لا - ۳ - ۳۴ + لا = ۰$ حل کرو

(۳) اگر مساوات $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$ کی قیمتیں سلسلہ ہندسہ میں مومن تو $ع = ق$

اسی مساوات $لا - ۳ - لا - ۲ = ۰$ کو حل کرو

(۴) اگر مساوات $لا + ق + لا + ر =$ کی قیمتیں بقدر رھ کے کم کی جائیں تو ثابت کرو

ہئت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اسکی قیمتیں سلسلہ ہندسہ میں ہونگیں بشرطیکہ ۲۴ رھ

۲۴ رھ $۴ - ق - ۳ = ۰$

(۵) اگر مساوات $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$ کی قیمتیں سلسلہ موسیقہ میں ہوں تو

$۲ ق = ۳ (ع - ر)$

(۶) اگر مساوات $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$ کی قیمتیں سلسلہ موسیقہ میں ہوں تو

مساوات $لا + ۲ ق + لا + ق + ر =$ بن سب سے بڑی اور سب سے چوٹی قیمتیں شامل ہونگیں

(۷) $لا + ق + لا + ر =$ کی ناممکن قیمتیں صورت $۳ = ۳۰$ کی ہیں

تو ثابت کرو کہ $۳ = ۳۰ + ق$

(۸) اگر $۳ = ۳۰ + ق$ وہ $۳۰ = ۳۰ + ق$ میں قیمتیں مساوات $لا + ع + لا + ع + لا + ع = ۰$

کی ہوں انہیں ہی حقیقی قیمت ہی اور مساوات $لا + م + لا + م + لا = ۰$ اس طرح پیدا ہوتی ہو

کہ اوپر کی مساوات کی قیمتیں بقدر رھ کے کم کر دیں تو ثابت کرو کہ

$۳ = ۳۰ + ق$ اور $۳ = ۳۰ + ق$

(۹) مساوات $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$ کو صورت

$۳ - ۳ = م = ۰$ کی طرف $لا = ۳ + ب$ فرض کر کے تخیل کرو اور مساوات کو

$۳ = م + ۳$ فرض کر کے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصل مساوات کی برابر قیمتیں ہوں تو

$$= 1 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$$

باب ۱۶

(۱) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مثبت تقریبی قیمت مساوات $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ کی دریافت کرو

(۲) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مساوات $1 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ کی تقریبی قیمتیں

۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب ۱۷

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہیں ان کی درمیان جو قیمتیں معادلات ذیل کی واقع ہوں ان کو

نیوٹن حسب کی ترکیب سے نکالو

(۱) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۲) $1 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان

(۳) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۴) $1 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان

(۵) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی ایک قیمت کی دریافت کرنی ہیں نیوٹن حسب کی ترکیب کام میں لاؤ

(۱) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$

باب ۱۸

(۱) معادلات ذیل میں جو حدود غائی متعین کی گئی ہیں ان کی درمیان معادلات کی

قیمت پورنر کی ترکیب سے دریافت کرو

(۱) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ قیمت درمیان ۲ اور ۳

(۲) $1 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ قیمت درمیان ۱ اور ۲ کے

(۳) $1 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 = 0$ قیمت درمیان ۱ اور ۲ کے

(۲) حل کرو مساوات $۳ - ۱۷ = ۰$ کو موافق ہوئے ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہوئے ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

$$(۱) ۳ - ۱۷ = ۰ \quad (۲) ۳ - ۱۷ + ۲ = ۰$$

$$(۳) ۳ - ۱۷ + ۵ = ۰ \quad (۴) ۳ - ۱۷ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$$

باب ۱۹

(۱) مساوات $۳ - ۱۷ + ۵ + ۱۰ = ۰$ کی قیمتوں کو ب و س کی بالقریبہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

$$(۱) (۱ + ب + ۱) (ب + س + ۱) (س + ۱ + ۱)$$

$$(۲) (۱ + ب - ۲) (ب + س - ۱) (۱ + س - ۲)$$

$$(۳) (۱ + ب + ۱) (۱ + س) (۴) (ب + ۲) (س + ۲) (۱ + س - ۲)$$

$$(۵) (۱ + ب) (۱ + س) (۶) (۱ + ب) (۱ + س) (۱ + س)$$

$$(۷) (ب - س) (س - ۱) (۱ - ب)$$

(۲) اگر کو ب و س قیمتیں مساوات

$$۳ - ۱۷ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$$

کی ہوں تو قیمت $(۱ + ب) (س + ۱) (۱ + ۱)$ کی دریافت کرو

(۳) مساوات $۳ - ۱۷ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$ کی قیمتیں

کو ب و س - ل فرض کر کے دریافت کرو

$$(۱) (۱ + ب) (۱ + س) (۱ + ۱) (۱ + ۱)$$

$$(۲) (۱ + ب) (۱ + س) (۱ + ۱) (۱ + ۱)$$

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات $۳ - ۱۷ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$ کی ہوتی

قیمتوں کی مجموعوں کی مجذور کے برابر ہو اور نیز ایسی مساوات بھی بناؤ جسکی قیمتیں برابر

اور ۳ - ۲ - ۱ - ۰ کا دریافت کرو اور مساوات

$$۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰$$

کو حل کرو

(۸) مساوات ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ کی قیمتیں بقدر ص کے کم کرو

اور ص کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدل ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت
۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ کی ہوں اور بتاؤ کہ یہ مساوات کس طرح حل ہو سکتی ہے

$$\text{مثال } ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰$$

(۹) تجربہ جملوں کے جذور نکالنے کا جو عمل ہی اسے ثابت کرو کہ مساوات ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۰

کی تخیل درجہ دوم کی مساواتوں کی طرف ہو جائیگی اگر ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰

$$\text{یا اگر } ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۰$$

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۰ تمام حقیقی قیمتیں نہیں

ہو سکتیں اگر ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ ثابت ہو

(۱۱) اگر ۱ (۱) جملہ نا طعہ صحیح لاکا ہو تو کیا ۱ (۱) = ۰ یا ۱ (۱) = ۰ کی یقینی ایک قیمت ہے

(۱۲) ایک مساوات کی قیمتوں کا یہ جملہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ بالقرینہ ہے

تو بتاؤ اس کی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۰ کی

قیمتیں ہوں اور اپنی سادہ ترین صورت میں لکھیں اور یہ قیمتیں غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۴} + \frac{۵}{۵} + \frac{۶}{۶} + \frac{۷}{۷} + \frac{۸}{۸} + \frac{۹}{۹} + \frac{۱۰}{۱۰} = ۰$$

برابر واحد کے ہی اگر ۱ = ۰ اور برابر صفر کے ہی اگر برابر صفر کے ہے یا اس

بنت صحیح عدد کی ہی جو ۱ - اسی کمی اور یہ بھی ثابت کرو کہ اگر

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۰$$

$$(۳) (۱) ۳ و ۲ (۲) ۴ و ۱ (۳) ۴ و ۲ (۴) ۴ و ۱ (۵) ۴ و ۱$$

$$(۵) ۲ و ۱ (۶) ۲ و ۱$$

$$(۴) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۴) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۴) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۴) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۸) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۸) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

ہو سکتا ہے کہ سب برابر کی ہے

$$(۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۵) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$

$$(۶) (۱) ۱ = ۱ (۲) ۲ = ۲ (۳) ۳ = ۳ (۴) ۴ = ۴ (۵) ۵ = ۵ (۶) ۶ = ۶$$



**MUSLIM UNIVERSITY LIBRARY
ALIGARH**

This book is due on the date last stamped. An
over-due charge of one anna will be charged for
each day the book is kept over time.
